

1905.

LIBRARY
MICHIGAN STATE NORMAL
COLLEGE

N^o 8.

ANNALEN DER P H Y S I K.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 17. HEFT 3.

DES GANZEN REIHE 322, BANDES 3. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1905.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.
ROSSPLATZ 17.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.
(Ausgegeben am 18. Juli 1905.)*

Inhalt.

	Seite
1. August Becker. Messungen an Kathodenstrahlen. (Hierzu Taf. IV, Figg. 1—10.)	381
2. G. Bakker. Zur Theorie der Kapillarschicht	471
3. L. Hermann. Über die Effekte gewisser Kombinationen von Kapazitäten und Selbstinduktionen	501
4. T. Retschinsky. Über die Wiedervereinigung der Ionen in Luft	518
5. A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen	549
6. B. Walter. Über das Röntgeneche Absorptionsgesetz und seine Erklärung	561
7. Karl L. Schaefer. Über die Erzeugung physikalischer Kombinationstöne mittels des Stentortelephons	572
8. G. Bakker. Antwort an H. Hulshof.	584

Manuskripte sind an den Herausgeber, **Professor Dr. P. Drude**, zu senden. Seine Adresse ist **Berlin N.W. 7, Neue Wilhelmstr. 16**.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

s
n
l
a
h
l
n
t
u
M

al
st
ke

so
ge
ab

and

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 17.

1. *Messungen an Kathodenstrahlen; von August Becker.*

(Hierzu Taf. IV, Flgg. 1–10.)

Die in der vorliegenden Arbeit mitzuteilenden Messungen an Kathodenstrahlen sind unter Zugrundelegung möglichst reiner Versuchsbedingungen mit Benutzung aller heute vorhandenen Kenntnis ausgeführt und erheben daher Anspruch auf einen Grad der Genauigkeit, der die von den meisten vorhergehenden Untersuchungen beanspruchte und erreichte wesentlich übertrifft und deshalb gestattet, an die Ergebnisse Schlüsse mit mehr Sicherheit zu knüpfen, als früher möglich war. Dies trifft besonders zu auf die unter 2. und 3. genannten Fälle und ist aus der folgenden Einleitung näher ersichtlich.¹⁾ Die Messungen beziehen sich auf

1. ε/μ und die Geschwindigkeit der Strahlen,
2. die Absorption in festen Körpern,
3. die Absorption in Gasen,
4. die Reflexion und sekundäre Emission fester Körper.

Einleitung.

ε/μ . Von grundlegender Bedeutung für unsere heute wohl allgemein anerkannten Vorstellungen vom Wesen der Kathodenstrahlen und damit erst den Sinn und die besondere Wichtigkeit der Größe ε/μ lehrend, waren wohl folgende Arbeiten:

1. Die bekannten Untersuchungen des Hrn. J. J. Thomson²⁾, der zwar in gaserfülltem Raum, also unter nicht völlig geklärten Nebenumständen beobachtet hat, dessen Resultate aber doch infolge weitgehender Variation des Versuches zweifel-

1) Eine ausführliche Zusammenstellung der Ergebnisse findet sich auch am Schluß eines jeden Abschnittes: Nr. 12, 40–45 u. 51–54.

2) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) 44. p. 293. 1897.

los wohl begründet erscheinen. Seine Zahlenwerte für ε/μ sind $0,67-0,91 \times 10^7$ und $1,0-2,5 \times 10^7$ C.G.S.

2. Möglichste Reinheit der Versuchsbedingungen — äußerstes Vakuum — erstrebte die kurz darauf veröffentlichte Untersuchung von Hrn. Lenard¹⁾, nach welcher $\varepsilon/\mu = 0,632-0,649 \times 10^7$ ist. Hr. Wien²⁾ gibt, unter ganz ähnlichen Versuchsbedingungen arbeitend, 2×10^7 an, aber ohne eingehende Messungen mitzuteilen. Unter ganz anderen Umständen — Erzeugung der Kathodenstrahlen durch ultraviolette Licht — fand Hr. Lenard³⁾ $1,15 \times 10^7$, Hr. J. J. Thomson⁴⁾ $0,58-0,85 \times 10^7$.

3. wären noch die Arbeiten von Hrn. Kaufmann⁵⁾ zu nennen, wobei allerdings nicht behauptet werden kann, daß aus denselben ersichtlich wäre, warum sie den Arbeiten von Hrn. Schuster⁶⁾ vorzuziehen wären, welche nach derselben Methode zu völlig anderen Resultaten führten. Hr. Kaufmann findet $1,77$ und $1,86 \times 10^7$, Hr. Schuster $0,1 \times 10^7$, später in $0,36 \times 10^7$ korrigiert. Die an 1. und 2. gewonnene Erkenntnis weist allerdings darauf hin, daß dem Kaufmannschen Wert der Vorzug zu geben sei, wozu noch kommt, daß die seiner Rechnung zugrunde gelegten Voraussetzungen nach der späteren Erfahrung sehr wohl berechtigt erscheinen.

4. Den Versuch, aus der direkten Messung der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen ε/μ abzuleiten, macht Hr. Wiechert⁷⁾ und gelangt zu dem Ergebnis, daß $1,01$ und $1,55 \times 10^7$ mögliche, dagegen $0,87$ und $1,84 \times 10^7$ kaum mögliche Werte wären.

Nachdem durch diese Versuche die Grundlagen als sicher gestellt gelten konnten, entstand von selbst die Aufgabe, unter

1) P. Lenard, Wied. Ann. 51. p. 225. 1894; 52. p. 23. 1894; 64. p. 279. 1898.

2) W. Wien, Verh. Phys. Ges. 16. p. 165. 1897; Wied. Ann. 65. p. 440. 1898.

3) P. Lenard, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 108. Okt. 1899; Ann. d. Phys. 2. p. 359. 1900.

4) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) 48. p. 547. 1899.

5) W. Kaufmann, Wied. Ann. 62. p. 597. 1897; 65. p. 431. 1898.

6) A. Schuster, Proc. Roy. Soc. 47. p. 526. 1890; Wied. Ann. 65. p. 431. 1898.

7) E. Wiechert, Wied. Ann. 69. p. 739. 1899.

Benutzung des nun Bekannten mit feineren Mitteln an die exakte Bestimmung von ϵ/μ zu schreiten.

Nach bestimmter Methode hat auf diese Weise zuerst Hr. Simon¹⁾ exakte Messungen angestellt und aus der Konstanz des zu $1,865 \times 10^7$ gefundenen Wertes auf die Unabhängigkeit desselben vom Entladungspotential geschlossen. Damit war allerdings noch nicht erwiesen, daß die an der Kathode gemessene Spannung tatsächlich der Größe $\mu/\epsilon \cdot v^2/2$ gleich und nicht nur proportional gesetzt werden darf.

Deshalb hat Hr. Seitz²⁾ mit ein und demselben Apparat Messungen nach drei verschiedenen Methoden angestellt und als Resultate gefunden, daß nicht nur Proportionalität sondern völlige Gleichheit der obigen beiden Ausdrücke bestehe, daß also die für die Geschwindigkeitserteilung an die Quanten maßgebende Spannung mit der an der Kathode gemessenen identisch ist.

Danach schien die Frage nach dem wahren Wert von ϵ/μ , die sich beim Überblicken aller vorgenannten Resultate und ihrer großen Schwankungen aufdrängt, zugunsten des Wertes $1,865 \times 10^7$ erledigt, wenn nicht Hr. Seitz auf Störungen hinweisen müßte, die in seinen Beobachtungen im gaserfüllten Raum auftreten, und deren völlige Beseitigung oder Elimination in Frage zu stellen wäre.

Ich fand es deshalb für wichtig, eine nochmalige exakte Bestimmung von ϵ/μ unter reinen Versuchsbedingungen — im völligen Vakuum — vorzunehmen nach einer Methode, die von der Kenntnis des Kathodenpotentials unabhängig ist. Es ergab sich $\epsilon/\mu = 1,747 \times 10^7$ C.G.S. für $v = 1,11 \times 10^{10}$ cm/sec, für geringere Geschwindigkeiten $1,847 \times 10^7$. Die Übereinstimmung dieses neuen Resultates mit den oben genannten dürfte jetzt zweifellos den Schluß gestatten, daß die erste Dezimale der gesuchten Größe 1,8.. definitiv als sichergestellt zu betrachten ist.

Absorption. Seit zum erstenmal durch Hertz³⁾ in den Metallen Körper bekannt wurden, die für die Kathodenstrahlen durchlässig sind, ist der Durchgang dieser Strahlen durch feste und gasförmige Medien und die damit verbundene Ab-

1) S. Simon, Wied. Ann. 69. p. 589. 1899.

2) W. Seitz, Ann. d. Phys. 8. p. 233. 1902.

3) H. Hertz, Wied. Ann. 45. p. 28. 1892.

sorption mehrfach Gegenstand eingehender Untersuchungen von Hrn. Lenard¹⁾ gewesen, deren Ergebnisse eine wesentliche Förderung unserer Kenntnisse vom Wesen der Kathodenstrahlen boten, und unsere gewohnten Anschauungen über die Konstitution der Materie in gewisser Richtung modifizierten, gleichzeitig aber auch sehen ließen, daß noch exaktere Versuche über die Absorption nötig wären, um in dieser Richtung eine Grundlage für weitere Schritte zu gewinnen. Die Deutung des Lenardschen Massengesetzes, nach welchem bei größeren Geschwindigkeiten Absorptionsvermögen und Dichte einander proportional sind ohne Rücksicht auf Aggregatzustand und chemische Beschaffenheit, ist vollkommen durchsichtig geworden durch die Annahme, daß die verschiedenen Atome aller Materie aufgebaut seien aus einerlei Bestandteilen in verschiedener Zahl, den sogenannten Dynamiden, von denen die einfachste Vorstellung die eines elektrischen Doppelpunktes von gewissem Moment wäre. Nun hat schon Hr. Lenard gezeigt, daß das Massengesetz nur angenähert, nicht exakt gilt, so daß den Dynamiden verschiedener Atomgattungen geringe spezifische Verschiedenheiten zuzuschreiben sind, die man in der Verschiedenheit der Momente suchen und durch möglichst genaue Bestimmung der Absorptionskonstanten der verschiedenen Substanzen experimentell ermitteln könnte. Eine solche Untersuchung, die einwandfrei und mit der erforderlichen Genauigkeit alle für die Erscheinung der Absorption maßgebenden Verhältnisse klarlegt, erscheint nach einer neueren Arbeit von Hrn. Lenard²⁾ um so aussichtsvoller, als danach zu vermuten ist, daß wir uns der Möglichkeit nähern werden, die Verschiedenheit der einzelnen Stoffe sowohl in ihrem elektrischen als auch in ihrem chemischen Verhalten auf ihre spezifischen Momente zurückzuführen.

Obwohl sich nun schon vor einigen Jahren Hr. Seitz³⁾ die Feststellung der Abweichungen vom Gesetz der Massenproportionalität zur Aufgabe gemacht hatte, sind wir doch dem oben bezeichneten Ziele nicht näher gekommen, einerseits weil der Verf. sich nur auf Metalle beschränkte und anderer-

1) P. Lenard, Wied. Ann. 51. p. 225. 1894; 56. p. 255. 1895.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 714. 1903.

3) W. Seitz, Ann. d. Phys. 6. p. 1. 1901.

seits, weil auch die für die Metalle gefundenen Resultate — von der Abhängigkeit der Absorptionsgröße von der Blättchendicke vorerst abgesehen — nur eine Wiederholung schon von Hrn. Lenard ausgesprochener Tatsachen bedeuten. Ebenso wenig bieten einige von Hrn. Leithäuser¹⁾ ermittelte Durchlässigkeiten von Aluminiumblättchen, worauf in (40) noch näher eingegangen ist, Wichtiges für den vorliegenden Fall.

Aus diesem Grunde ist in der vorliegenden Arbeit das Problem erneut gestellt, und zwar ist versucht worden, nicht nur für feste Körper, sondern auch für Gase unter Zugrundelegung möglichst reiner Bedingungen das jedem Körper eigene Dynamidenmoment zu ermitteln und die sich daraus ergebenden Vorstellungen mit der übrigen Erfahrung zu verbinden.

Da die von Hrn. Lenard in seinen Arbeiten mit schnellen Kathodenstrahlen angewandte Methode der Absorptionsmessung mit Hilfe der Phosphoreszenz völlig einwandfrei ist und zu Resultaten²⁾ führte, die auch im Licht unserer neueren Erkenntnis von der Wirksamkeit der Kathodenstrahlen unverändert bestehen bleiben, so konnte eine neue Bestimmung der Absorptionsgrößen nur dann auf größere Genauigkeit Anspruch erheben, wenn an Stelle der Phosphoreszenzmethode die genauere elektrometrische gesetzt und bei völligem Abschirmen aller dabei möglichen Störungen auch eine Unabhängigkeit des Elektrometerganges von den unvermeidlichen Schwankungen der Anfangsintensität der Strahlen gewährleistet wurde. Das letztere ließ sich durch Anwendung einer sogenannten Kontroll-elektrode erreichen, die jeweils einen kleinen und unter allen Umständen konstanten Bruchteil der Gesamtstrahlung auffing, der dann mit der an der Hauptelektrode freiwerdenden Elektrizitätsmenge zu vergleichen war.

Einwandfreie Intensitätsmessungen der Kathodenstrahlen in Gasen von gewöhnlichem Druck sind bisher nur mit Phosphoreszenzschirmen ausgeführt worden, während man sich für elektrometrische Arbeiten auf stark verdünnte Gase beschränken mußte und trotzdem noch mit Fehlerquellen zu rechnen hatte.

1) G. E. Leithäuser, Ann. d. Phys. 15. p. 283. 1904.

2) Z. B. hatten Sekundärstrahlen keinen Einfluß auf das Resultat, da die Schwellengeschwindigkeit des benutzten Ketons erst bei etwa 4000 Volt liegt (Ann. d. Phys. 12. p. 469. 1903).

Demgegenüber habe ich mich im folgenden einer neuen, durch eine frühere Arbeit¹⁾ begründeten Methode bedient, welche in der Anwendung kleiner Paraffinkondensatoren besteht und die Untersuchung gestattet unabhängig von Leitfähigkeit im Gas oder sekundärer Strahlung.

An Resultaten ist kurz²⁾ zu nennen, daß die für vier verschiedene Metalle ermittelten Absorptionskoeffizienten, welche sich unabhängig von dem zu ihrer Bestimmung benutzten Apparat erweisen, innerhalb eines ziemlich umfassenden Dickenbereiches völlig konstant sind und erst bei relativ großen Dicken um einen kleinen Betrag zunehmen. Hier befinden sich meine Beobachtungen im Widerspruch mit den Resultaten des Hrn. Seitz.³⁾ Mit den aus einer Arbeit von Hrn. Leithäuser⁴⁾ gezogenen Folgerungen, welche für Primärgeschwindigkeit bis gegen 17 000 Volt einen merklichen Geschwindigkeitsverlust beim Durchgang durch dünne Blättchen aussagen, der aber um so unmerklicher wird, je größer die Strahlgeschwindigkeit, sind meine Resultate als in Einklang zu betrachten. Die relativ zur Dichte der Metalle stärkste Absorption der Quanten zeigen Aluminium und Silber, während Kupfer um 20 Proz. und Gold um 15 Proz. weniger absorbiert.

Bei Gasen habe ich das Verhältnis von Absorptionsvermögen und Druck als konstant gefunden, wie schon Hr. Lenard⁵⁾ angegeben hat. Die neu und exakt konstatierten Abweichungen vom Massengesetz erscheinen für manche Gase sehr beträchtlich. Besonders große Absorption zeigt in dieser Hinsicht Wasserstoff und mit ihm alle Gase, deren Moleküle Wasserstoff enthalten, während auf der anderen Seite die einatomigen Gase Argon und Helium eine ausgesprochene geringe Absorption verraten und dadurch auf Vorhandensein relativ kleiner Dynamidenmomente d. h. schwacher Kraftfelder im Atom hinweisen. Dies legt die Annahme nahe, daß die bis jetzt unbekannten Kräfte, welche die Atome desselben oder

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 13. p. 394. 1903.

2) Eine ausführliche Zusammenstellung vgl. Nr. 40—45 u. Nr. 51—54.

3) W. Seitz, Ann. d. Phys. 6. p. 1. 1901.

4) G. E. Leithäuser, Diss. Berlin 1903; Ann. d. Phys. 15. p. 283. 1904.

5) P. Lenard, Wied. Ann. 51. p. 225. 1894; 56. p. 255. 1895.

verschiedener Gase aufeinander ausüben, wohl in den verschieden starken Kraftfeldern der Dynamiden zu vermuten sind, deren gegenwärtiges Studium weitere Anhaltspunkte hierfür zu geben verspricht. Von besonderer Wichtigkeit erscheint das Ergebnis, daß die Reihe der Gase, welche nach der Größe der Abweichungen vom Massengesetz geordnet ist, nahezu denjenigen Reihen parallel geht, welche man beim Ordnen der Gase nach der Größe des Quotienten von Molekularvolumen und Dichte oder der um eins verminderten Dielektrizitätskonstanten und der Dichte erhält. Diese Beziehung ist schon von Hrn. Lenard vermutet und am Wasserstoff bestätigt worden.

Reflexion und sekundäre Emission. Eingehende Messungen über die von einem von Kathodenstrahlen getroffenen Metall zurückgeworfenen Strahlen hat zuerst Hr. Starke¹⁾, späterhin zusammen mit Hrn. Austin²⁾, und danach Hr. Seitz³⁾ mitgeteilt. Die den Arbeiten zugrunde liegende Vorstellung aber, daß die von der Metalloberfläche emittierte Strahlenmenge in ihrer Gesamtheit ein Bruchteil der auffallenden Quantität sei, ist auch für vertikale Inzidenz unhaltbar geworden durch die Beobachtungen von Hrn. Lenard⁴⁾, wonach eine von Kathodenstrahlen getroffene Metallfläche langsame sekundäre Strahlen emittiert, deren Ladung nicht den primären Strahlen entnommen ist. Die gegenwärtige Arbeit gestattete gleichzeitig mit der Messung der Absorption der Metalle das Studium der Gesamtheit der bestehenden Vorgänge an der Oberfläche. Es zeigte sich, daß neben sekundärer Emission, die für die benutzten schnellen Kathodenstrahlen nachgewiesen und quantitativ bestimmt wurde, gleichzeitig eine Reflexion primärer Strahlen an der Metalloberfläche besteht, so daß sich die sog. „reflektierten“ Strahlen zusammensetzen aus zwei Anteilen mit wesentlich verschiedenen Geschwindigkeiten und verschiedener Herkunft. Die für die Summe der beiden Anteile von mir gefundene Größe weicht von den als „Reflexions-

1) H. Starke, Wied. Ann. 66. p. 49. 1898; Ann. d. Phys. 3. p. 75. 1900.

2) L. Austin u. H. Starke, Ann. d. Phys. 9. p. 271. 1902.

3) W. Seitz, Ann. d. Phys. 6. p. 1. 1901.

4) P. Lenard, Ann. d. Phys. 15. p. 485. 1904.

koeffizienten“ der Metalle bezeichneten Werten von Hrn. Starke nicht sehr wesentlich ab und deutet somit darauf hin, daß die für im Durchschnitt 15000 Volt Entladespannung beobachteten Erscheinungen von den bei 35000 Volt gefundenen nicht sehr verschieden zu sein scheinen. Die Werte von Hrn. Starke aber sind nach dem Vorstehenden nicht weiter als der Bruchteil primärer Strahlen, der eine Zurückwerfung am Metall erfährt, anzusehen, sondern als eine Summe von zum Teil reflektierten primären und zum Teil neu erzeugten sekundären Strahlen. — Von weiterem Interesse ist die Ausdehnung meiner Beobachtungen auf dünne, noch teilweise gut durchlässige Blättchen.

1. Geschwindigkeit und e/μ .

1. Der Verwendung des Induktoriums zur Erzeugung schneller Kathodenstrahlen, wie sie in der gegenwärtigen Arbeit erforderlich waren, stehen von verschiedenen Seiten wesentliche Bedenken entgegen, die sich auf die Beobachtung stützen, daß das Induktorium niemals einen einzigen Strahl von konstanter Geschwindigkeit, sondern stets eine Summe von Strahlen der verschiedensten Geschwindigkeiten liefere, die unter der Einwirkung eines Magnetfeldes sich in ein Spektrum¹⁾ ausziehen lassen. Demgegenüber ist zunächst hervorzuheben, daß eine vielplattige Influenzmaschine, die wohl eine homogenere Strahlung zu geben befähigt ist, doch erhebliche Schwierigkeiten verursacht, wenn die geforderte Spannung an der Kathode einmal 30000 Volt überschreitet, so daß es nur selten unter solchen Verhältnissen gelingen wird, kurze Zeit eine annähernd konstante Spannung an der Kathode zu halten. Außerdem läßt sich wohl erwarten, daß die Strahlung von einem Induktorium um so homogener werden dürfte, je weiter das Vakuum in der Entladungsröhre vorschreitet. Denn wenn auch die Spannung an den Sekundärpolen im Augenblick der Stromunterbrechung eine rasch auf- und absteigende ist, so wird doch nur dann eine Entladung in der Kathodenröhre erfolgen, wenn die momentane Spannung hoch genug ist, das stark verdünnte Gas zu durchbrechen. Dieser Fall wird aber nur für die

1) M. Birkeland, C. R. 123. p. 492. 1896.

maximale Spannung eintreten können, wenn das Vakuum exakt auf die der Röhre parallel geschaltete Funkenstrecke abgepaßt ist. Daß zwar ein gewisser Teil der Spannung des absteigenden Astes sich danach ebenfalls durch die Röhre entladen werde, ist anzunehmen und durch die im Gase bei der ersten Entladung auftretende Leitfähigkeit begründet. Aber dieser Teil wird wieder um so geringer sein, je größer das Vakuum und die Funkenstrecke ist. Da ferner die Maximalspannung des Sekundärkreises eines Induktoriums wesentlich abhängt von der Art und Schnelligkeit des Unterbrechens¹⁾, so lag die Wahrscheinlichkeit noch näher, daß es gelingen werde, durch geeignete Wahl des Unterbrechers bei Anwendung hoher Gasverdünnungen eine nahezu homogene Kathodenstrahlung²⁾ zu erzielen. Bevor aber zu den eigentlichen Absorptionsversuchen geschritten werden konnte, waren die vorstehenden Erwägungen der experimentellen Prüfung zu unterziehen.

2. Der hierzu verwendete Apparat ist durch die Fig. 1 dargestellt. Die Kathodenstrahlen werden in einer Kathoden-

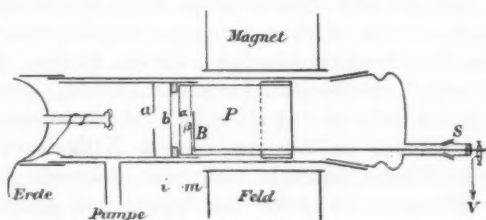


Fig. 1.

röhre bekannter Art erzeugt; sie gelangten durch das über einem in die Entladeröhre eingeschmolzenen Platinröhrchen befestigten Aluminiumfenster von 0,15 cm Durchmesser in eine mit möglichst wenig Siegelack angekittete Glasröhre, deren anderes Ende durch einen Schliff luftdicht verschlossen werden konnte. Beide Röhren standen mit je einer Quecksilberpumpe

1) Vgl. A. Oberbeck, Wied. Ann. 62. p. 109. 1897.

2) Mit diesen Erwägungen, aus denen folgt, daß schwächere Verdünnungen und kontinuierlich wirkende Unterbrecher ein stärkeres magnetisches Spektrum erzeugen würden, scheinen die bekannten Beobachtungsergebnisse übereinzustimmen.

durch weite und möglichst kurze Glasrohrverbindungen in Kommunikation und konnten hierdurch getrennt voneinander auf sehr hohe Grade der Verdünnung gebracht werden, zumal jede Schlauchverbindung vermieden war. Die Versuchsröhre war in ihrem dem Fenster benachbarten Teil im Inneren mit einer gut anliegenden geerdeten Messingröhre von etwa 7 cm Länge umkleidet, die vorne mit zwei in kleinem Abstand voneinander angebrachten Metallblenden von 0,2 und 0,1 cm Öffnung bedeckt war und sowohl den Kathodenstrahl vor der Einwirkung äußerer elektrischer Kräfte als den vom Strahl durchzogenen Raum vor Lichtstrahlen von außen schützen sollte. Auf der äußeren Blende *b* war ein anfänglich 3 und später 1 mm dicker isolierender Ring aus Ebonit aufgeklebt, gegen den die eigentliche Vorrichtung zur Beobachtung der Strahlen, von einem breiten Messingring *m* festgehalten, angelegt werden konnte. Der letzte Apparatteil bestand aus einer etwa 6,5 cm langen, 3 cm weiten Messingbüchse, die an ihrem Vorderteile nach-einander mit zwei 0,67 cm voneinander entfernten Blenden verdeckt war, die beide einen wenige Millimeter langen und in der Weite von 0,005—0,05 cm variablen zentralen Spalt für den Durchgang der Strahlen besaßen. In die Büchse, die horizontal in die Versuchsröhre eingeführt wurde, konnte eine passend geschnittene photographische Platte entweder vertikal eingeführt werden, so daß der scharfe Kathodenstrahl die empfindliche Fläche senkrecht traf, oder es konnte die Platte mit ihrer Ebene in der Achse der Büchse und gleichzeitig in der Fortpflanzungsrichtung des Strahles horizontal gelegt werden derart, daß der Kathodenstrahl seiner ganzen Richtung nach über die empfindliche Plattenschicht hinstreichen und sich auf dem ganzen Wege photographisch abbilden mußte. Mit Hilfe eines Messingstäbchens, das durch die Metallbüchse und eine Glasabzweigung am hinteren großen Glasschliff hindurch nach außen geführt war, konnte ein kleiner Metallschieber *B* von außen durch Drehen von *S* beliebig bewegt und dadurch die photographische Platte vor Kathoden- und Lichtstrahlen geschützt werden.

3. Die Erzeugung des Entladestromes geschah durch ein größeres Induktorium, dessen Primärkreis mit 24 Volt gespeist wurde. Als Unterbrecher kam eine lange Stahlnadel zur Ver-

wendung, die durch einen raschen, kräftigen Schlag mit dem Finger in ein Quecksilbergefaß getaucht und durch eine Feder sofort wieder emporgezogen wurde. Die Zahl der Unterbrechungen stand danach in eigenem Belieben; eine Variation hierin war innerhalb der Grenzen 1 und 20 geboten zum Zweck der Erreichung geeigneter Expositionen. Der Kathodenröhre parallel geschaltet war in allen Fällen eine Funkenstrecke von 3 cm zwischen Messingkugeln von je 1 cm Durchmesser, und die Gasverdünnung wurde immer so reguliert, daß neben den Entladungen im Rohr von Zeit zu Zeit einzelne Funkenentladungen auftraten. Um das Vakuum einige Zeit hindurch auf möglichst unveränderter Höhe zu erhalten, habe ich mit der Entladeröhre und der Pumpe durch eine kurze Röhre eine dickwandige Glasflasche von 2—3 Liter verbunden und dieselbe ebenfalls evakuiert.

4. Die für das Studium der Geschwindigkeitsverteilung im Kathodenstrahl erforderliche magnetische Ablenkung habe ich mit Hilfe zweier Drahtspulen hervorgerufen, die in festem Abstand voneinander vertikal gestellt waren und die Versuchsröhre zwischen sich hatten. Der Forderung der Kenntnis des Feldverlaufes in der Fortpflanzungsrichtung des Strahles wurde Genüge getan durch relative Messungen der Ablenkung zweier verschiedener kleiner Bifilarspulen¹⁾, durch die ein schwacher Strom i geschickt wurde, dessen Wert mit Hilfe eines Präzisionsamperemeters von Siemens & Halske auf 0,0001 Amp. genau festzustellen war. Sind F und F' die Feldstärken, α und α' die entsprechenden Ablenkungswinkel der Bifilarspule und i und i' die durch sie geschickten Ströme für zwei verschiedene Punkte im Magnetfeld, so findet sich

$$\frac{F}{F'} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} \cdot \frac{i'}{i},$$

wobei F in allen Fällen auf den Wert in der Achse der Spulen als einer noch absolut zu bestimmenden Größe bezogen werden kann. Da diese absolute Bestimmung mit Hilfe von Bifilarspulen eine exakte Ermittlung von Direktionskraft und Windungsfläche erfordert, so wurden zur Sicherheit Be-

1) F. Himstedt, Wied. Ann. 11. p. 828. 1880; F. Stenger, Wied. Ann. 33. p. 312. 1888.

obachtungen mit vier gänzlich voneinander verschiedenen Spulen angestellt. Die Drahtwicklung befand sich das eine Mal auf einem kurzen Messingzylinder von 1,58 cm Durchmesser, in den anderen Fällen in der Rinne einer Messingkugel von 0,9 cm oder einer Kugel aus Vulkangfaser von 0,515 cm Durchmesser. Die erzielten Resultate sind die folgenden:

Direktionskraft	Windungsfläche	Feldstärke F
272,777 [cm ² g sec ⁻²]	115,47 [cm ²]	6,817 [cm ^{-1/2} g ^{1/2} sec ⁻¹]
1240,610	43,414	6,887
380,420	199,558	6,827
453,984	199,558	6,832

Mittel 6,841

Da die größte Abweichung der Einzelwerte vom Mittel nur 0,7 Proz. beträgt, so kann der Wert 6,841 pro 1 Amp. Magnetisierungsstrom den weiteren Messungen als Grundlage dienen. Die Einzelwerte selbst sind Mittel aus 7—8 Ablenkungsversuchen, in denen sowohl die Stromstärke in der Bifilarrolle als auch der Magnetisierungsstrom in weiten Grenzen variiert wurden; die Abweichungen vom Mittel liegen hier meist noch unter 0,5 Proz. Der unter Verwendung des obigen Wertes aus den relativen Messungen abgeleitete absolute Feldverlauf ist in der Kurve 1 der Fig. 2 graphisch dargestellt.

Dasselbe Magnetfeld wurde außerdem durch Beobachtung der Schwingungen einer kleinen mit Blei belasteten und 0,94 g schweren Magnetnadel ausgemessen unter Zugrundelegung des mehrfach im hiesigen Institut nahezu übereinstimmend für den betreffenden Ort gefundenen Wertes 0,17 für die Horizontalintensität. Eine Kontrolle dieses Wertes ergab sich aus den mit den obigen Bifilarspulen zum Zweck der Elimination des Erdfeldes angestellten Versuchen. Die Windungsflächen bildeten, da die Magnetspulen nicht im magnetischen Meridian lagen, einen Winkel von 27° mit dem letzteren. Es fand sich als Mittel des Erdfeldes in dieser Richtung $E = 0,1518$, woraus $H = 0,1704$ C.G.S. in Übereinstimmung mit obigem berechnet wird. Der hierbei erhaltene Feldverlauf pro 1 Amp. Magnetisierungsstrom ist durch die Kurve 2 gegeben. (Beim Versuch betrug die Stromstärke in den Magnetspulen 1,24 Amp.) Die Abweichungen der mit den beiden Methoden erhaltenen

Resultate voneinander sind zu ungunsten der Magnetnadel durch die Tatsache zu erklären, daß die Nadel in stärkeren Feldern etwas ihre Magnetisierung änderte, wie auch aus den veränderten Schwingungsdauern im Erdfeld vor und nach Ein-

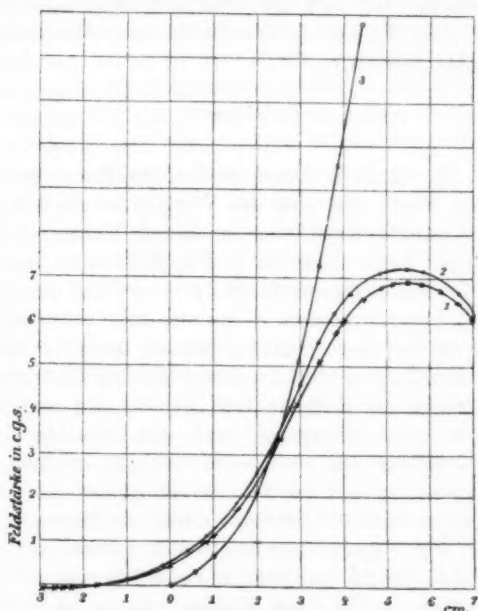


Fig. 2.

bringen der Nadel in das Magnetfeld der Spulen ersichtlich war. Aber auch in schwachen Feldern wären wohl kleine Abweichungen zu konstatieren infolge kleiner Veränderungen, welche der Kraftlinienverlauf des Feldes in der Umgebung der Nadel erleiden könnte.

5. Nachdem schon vor Jahren von Hrn. Simon¹⁾ auf alle Einzelheiten genügend hingewiesen worden ist, die zur Erreichung richtiger Bilder für den Strahlenverlauf notwendig berücksichtigt werden müssen, mag hier der Hinweis genügen, daß Fehlerquellen jeder Art, die zu einer falschen Deutung

1) S. Simon, Wied. Ann. **69**. p. 589. 1899.

der erhaltenen Photogramme führen könnten, mit aller Vorsicht eliminiert wurden und daß besonders diejenigen Bedingungen erfüllt waren, welche die von Simon für die Berechnung abgeleitete Formel zur Voraussetzung hat. Dahin ist zu rechnen, daß sich der schärfere der beiden benutzten Spalte in allen Fällen an den Stellen der Strahlenbahn befand, wo das Integral

$$\int_{-K}^0 H dx = 0$$

erfüllt ist, da dann in diesen Stellen die Bahn der Strahlen unabgelenkt bleibt und man den Vorgang so ansehen darf, als ob die ablenkende Kraft erst an diesem Punkte in Wirkung treten würde. Diese Stelle ist in Fig. 2 mit der Abszisse Null bezeichnet. Der maßgebende Spalt — es war manchmal der innere, manchmal der äußere — konnte, da er selbst immer eine feste Lage im Apparat einnahm, dadurch leicht zur Koinzidenz mit der Nullstellung gebracht werden, daß ich die Magnetspulen entweder gegen die Kathode hin oder von ihr weg verschob.

6. Um nun einzugehen auf das Studium der Geschwindigkeitsverteilung in meinen Kathodenstrahlen, sei zunächst hingewiesen auf die Photographien der nachstehenden Taf. IV, deren Schärfe allerdings durch die Reproduktion gelitten hat. Fig. 1 zeigt einen magnetisch unbeeinflussten Strahl, der eine erste Blende von 0,05 und eine folgende von 0,008 cm Weite passierte und in 2 mm Abstand von der letzteren Blende in die photographische Platte eintrat. Fig. 2 zeigt einen einseitig mit 10,9 Amp. abgelenkten Strahl; der nach der anderen Seite abgelenkte wurde nur angedeutet. Beide Bilder haben gemeinsam, daß der Strahl anfänglich sehr scharf verläuft, sich allmählich verbreitert und nach dem Ende zu verschwommener wird. Es ist dies ohne weiteres erklärlich, wenn wir uns vergegenwärtigen, daß die Kombination der zwei Spalte einen Strahl mit Kern- und mit Halblicht liefern muß und daß der letztere um so weniger intensiv sein wird, je weiter sich der Strahl vom Spalt entfernt. Der Eindruck, als hätten wir es mit einer Summe von Strahlen sehr verschiedener Geschwindigkeiten zu tun, besteht beim Anblick des abgelenkten Strahlbildes nicht; denn wenn auch die Ver-

breiterung des Strahles ziemlich rasch mit der Entfernung zunimmt, so scheint sie nur sehr unbedeutend diejenige des unbeeinflussten Strahles zu übersteigen. Indes ist ein unmittelbarer Vergleich der beiden Strahlen miteinander nur dann möglich, wenn beide unter denselben Bedingungen, d. h. auf derselben Platte erzeugt werden. Deshalb sind alle folgenden Aufnahmen immer in der Weise ausgeführt worden, daß ich die Exposition für Magnetisierungsströme beider Richtungen und gleichzeitig für den Strom Null vornahm. Zuvor sei nur noch des eigenartigen Strahlenbildes Erwähnung getan, das sich auf beiden erwähnten Platten dort zeigt, wo der Kathodenstrahl in die Platte eintritt. Es fällt schwer, die Erscheinung auf Phosphoreszenz der Gelatine zurückzuführen; wahrscheinlich handelt es sich hier um Reflexionen des Strahles an den Wänden des Spaltes oder am Glas- oder Gelatinerand der Platte (vgl. auch 10).

7. Ein direkter Vergleich der nach verschiedenen Seiten abgelenkten Strahlen läßt sich an den Figg. 3 und 4 gut anstellen, wenn man die zu gleichen Abständen vom Spalt gehörigen Dicken der einzelnen Strahlenzüge miteinander vergleicht. Ich habe solche Messungen in größerer Zahl mit Hilfe eines Komparators meist an den zum Teil verstärkten Negativen ausgeführt und gefunden, daß die Abweichung der Dicken der abgelenkten Strahlen von derjenigen des unabgelenkten bei normalen Negativen im ungünstigsten Falle eine Änderung der Ablenkungen um 3,2 Proz. verursachte. Da $z^2 \times V = \text{konst.}$ ist, wenn wir unter z die seitliche Ablenkung des Strahles und unter V die ihn erzeugende Potentialdifferenz verstehen, so folgt, daß dies ein Schwanken von V um 6,1 Proz. bedeutet. Oder nehmen wir, wie sich im folgenden ergeben wird, V zu rund 35000 Volt, so folgt, daß die wirksamen Spannungsdifferenzen sich nur mit 2000 Volt um die angegebene herumbewegen werden. Die ganze Abweichung, die in den meisten Fällen noch eine geringere ist als 2000 Volt, würde sich auch durch die Annahme erklären lassen, daß sie bei 10—20 aufeinander folgenden Entladungen der Kathodenröhre hervorgerufen wäre von den letzten Entladungen, bei denen das Vakuum schon um ein kleines verschlechtert ist. Mindestens ein Teil der Abweichung wird sicher diesem Fall

zuzuschreiben sein. Von den ausgeführten Messungen teile ich die Resultate mit, die für das erste abgelenkte Strahlenpaar der Fig. 4 erhalten wurden.

Tabelle I.

Abstand vom Spalt	Strahldicke		
	links	Mitte	rechts
cm	cm	cm	cm
2,93	0,024	—	0,023
3,23	0,038	—	0,040
3,43	0,054	0,048	0,052
3,93	0,066	0,067	0,070
4,23	0,085	0,088	0,088
4,43	0,092	0,093	0,095
4,63	0,098	0,097	0,098
4,93	0,099	0,099	0,099
5,23	0,100	0,103	0,103

8. Wenn sonach die Ansicht berechtigt erscheint, daß wir es mit nahezu vollkommen homogenen Strahlen zu tun haben, so ist doch noch zu erwähnen, daß auf einigen Photographien die stark abgelenkten Strahlen einen äußerst schwachen Schleier nach den mehr abgelenkten Stellen hinzeigen, der der Messung kaum zugänglich ist. Er würde aber hinweisen auf die Existenz noch langsamerer Strahlen, die allerdings nur in sehr geringer Intensität vorhanden sein können. Um hierüber Aufschluß zu bekommen, machte ich einige photographische Aufnahmen mit vertikal gestellter Platte, da ich annahm, daß sich der erwartete Schleier hier deutlicher markieren werde. Die erhaltenen Bilder stellen sich durch die Figg. 5—7 dar; auch hier können nur Spuren leichter ablenkbarer Strahlen wahrgenommen werden — eine kleine Verbreiterung der abgelenkten Bilder wäre dadurch zu erklären, daß die Strahlen hier unter einem spitzen Winkel auf die Platte fallen. Als empfindlichstes Mittel endlich zum Nachweis der fraglichen Strahlenart mußte sich eine phosphoreszierende Substanz von möglichst niedrigem Schwellenwert erweisen. Ich habe deshalb das abgelenkte Strahlenbündel auf einen mit CaS , Bi , $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ ¹⁾ bestreuten

1) Vgl. P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 465. 1903.

Phosphoreszenzschirm fallen lassen, den mir Hr. Prof. Lenard gütigst zur Verfügung stellte. Es zeigte sich dabei, daß der äußerst intensive Lichtstreif, der ohne Magnetfeld in allen Fällen vollkommen scharf begrenzt und in 4,6 cm Abstand vom Spalt 1 mm breit war, bei einem Magnetisierungsstrom von 5,5 Amp. eine kleine Ablenkung erfuhr, dabei aber seine Breite nahezu beibehielt. Während in den meisten Fällen außer diesem Lichtstreif nichts anderes zu sehen war, erschien bei einigen Entladungen nach der Seite größerer Ablenkungen hin ein etwa 0,5 mm breiter Lichtsaum — Fig. 8a —, dessen Intensität ich roh auf $\frac{1}{50}$ von derjenigen des Hauptstreifens schätzte. Bei 10 Ampère Spulenstrom hatte sich der Hauptstreif auf 1,25 mm verbreitert, und ebenso nahm die Breite des Saumes auf 1,0 mm zu — Fig. 8b —. Größere Säume als 1,2 mm wurden auch bei noch viel größeren Strömen nie beobachtet. Es ist zu vermuten, daß wenigstens ein Teil des stärker abgelenkten Lichtes sekundärer Strahlung im Phosphor zuzuschreiben wäre, die sich auf der photographischen Platte nicht bemerklich gemacht hätte. Daß aber auch kleine Mengen langsamer Strahlen direkt vom Fenster der Entladeröhre kommen, muß daraus geschlossen werden, daß auch sehr schwache Säume auf der photographischen Platte auftraten und daß der Phosphor diese Säume nur bei einzelnen Entladungen deutlich zeigte. *Wir schließen aus diesen Betrachtungen, daß die angewandte Kathodenröhre bei der bestimmten Wahl des Induktoriums zur Stromlieferung vornehmlich eine intensive schnelle Strahlung von nur einerlei Ablenkbarkeit liefert, und daß bei manchen Entladungen außerdem eine sehr schwache Strahlung auftritt, die im Minimum einer Spannungsdifferenz von nahe 23000 Volt entspricht.*

Daß diese zweite Strahlensorte auf die folgenden Absorptionsmessungen so gut wie keinen Einfluß hat, erhellt daraus, daß sie nur in einzelnen Fällen erscheint, daß ihre Intensität im günstigsten Falle nur 2 Proz. von derjenigen des Hauptstrahles beträgt, und daß ihre Geschwindigkeit kleiner und infolgedessen ihre Absorption eine viel größere ist. Die mit den Paraffinkondensatoren angestellten Beobachtungen werden aus diesen Gründen von der Existenz solcher Strahlen unabhängig sein; aber auch die für blanke Elektroden erhaltenen Elektrometerausschläge würden nur für sehr dünne ab-

sorbierende Schichten und für die freie Elektrodenfläche eine kleine und somit in den Fehlerbereich fallende Korrektur von weniger als 1 Proz. erfahren müssen. In diesem Sinne dürfte die Berechtigung der Voraussetzung einer homogenen Strahlung für die künftigen Messungen außer Zweifel gestellt sein. Es sei noch bemerkt, daß sich unser gezeichnetes Bild von der Geschwindigkeitsverteilung eng den Verhältnissen anschließt, die Hr. Lenard¹⁾ früher mitgeteilt hat. Daraus geht hervor, daß entgegen den von verschiedenen Seiten geäußerten Behauptungen ein Induktorium wohl homogene Strahlen zu liefern vermag, wenn nur die zuerst von Hrn. Lenard ausprobierten Erzeugungsbedingungen streng eingehalten werden.

9. Es sei im folgenden die Geschwindigkeitsmessung des Kathodenstrahles mitgeteilt, für den die Erzeugungsbedingungen innerhalb der ganzen Arbeit streng unveränderlich waren. Da die Größe ε/μ ebenfalls neu zu bestimmen war, wurde eine Methode benutzt, die vordem von Hrn. Kaufmann²⁾ und Hrn. Lenard³⁾ angewendet war und darin besteht, daß die Ablenkung des Kathodenstrahles beobachtet wird einmal, wenn er unbeeinflusst ist von fremden elektrischen Kräften, das andere Mal, wenn er sich in einem starken elektrischen Feld in der Richtung der Kraftlinien desselben bewegt. Im letzteren Falle tritt eine Verzögerung oder Beschleunigung der ursprünglichen Geschwindigkeit ein um einen Betrag, der durch die Stärke des elektrischen Feldes gegeben ist. Vergleichen wir, um größere Differenzen zu haben, die Ablenkungen, die für ein verzögerndes Feld gelten, mit denjenigen, die für ein beschleunigendes Feld gemessen werden, so stellen sich die von Hrn. Simon abgeleiteten Beziehungen folgendermaßen dar:

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{2 \kappa_1'^2 (V_0 - V_1)}{J_1^2 \left[\int_0^{x_0} dx \int_0^x H dx \right]^2},$$

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{2 \kappa_2'^2 (V_0 + V_2)}{J_2^2 \left[\int_0^{x_0} dx \int_0^x H dx \right]^2},$$

1) P. Lenard, Wied. Ann. 52. p. 23. 1894.

2) W. Kaufmann, Wied. Ann. 65. p. 431. 1898.

3) P. Lenard, Wied. Ann. 65. p. 504. 1898.

worin

$$z'^2 = z^2 \left[1 - z^2 \frac{\int_0^{x_0} dx \left(\int_0^x H dx \right)^2}{\left[\int_0^{x_0} dx \int_0^x H dx \right]^2} \right]$$

ist. Es ist freigelassen, daß sich in beiden Fällen die Spulenströme ändern könnten. V_0 bedeutet die Erzeugungsspannung, unabhängig davon, ob dieselbe direkt mit der Elektroden-spannung identisch wäre oder nicht. Als wesentlicher Vorteil der Methode ergibt sich V_0 unabhängig von ε/μ und der Feldstärke

$$V_0 = \frac{\frac{\kappa_1'^2}{\kappa_2'^2} \cdot V_1 \cdot J_2^2 + V_2 \cdot J_1^2}{\frac{\kappa_1'^2}{\kappa_2'^2} \cdot J_2^2 - J_1^2}.$$

Nach Einsetzen des erhaltenen Wertes in eine der beiden vorher geschriebenen Formen resultiert ε/μ , woraus sich die Strahlgeschwindigkeit ergibt durch

$$v = \sqrt{2 \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot V_0}.$$

10. Die Versuche waren unter Benutzung der schon beschriebenen Vorrichtungen in der Weise anzustellen, daß zunächst alle Metallteile in der Versuchsröhre geerdet und dabei Aufnahmen für den geradlinigen, unbeeinflussten, für den nach rechts und den nach links magnetisch abgelenkten Strahl gemacht wurden. Dann wurde die die photographische Platte enthaltende Metallbüchse durch Verbindung der herausragenden Metallstange mit dem einen Pol einer Elektrisiermaschine auf positives oder negatives Potential geladen. Dabei bildete sich in dem kleinen durch den isolierenden Ring i der Fig. 1 begrenzten Raum ein elektrisches Feld aus, das von den Strahlen zu durchlaufen war, ehe das Magnetfeld auf sie einwirkte. Wurde jetzt wieder eine Aufnahme des nach links und nach rechts abgelenkten Strahles gemacht, so waren die oben bezeichneten Größen aus dem Vergleich der beiden Strahlen-

paare miteinander zu bestimmen. Die ersten in dieser Weise ausgeführten Versuche ergaben nun in Übereinstimmung mit einer einfachen Überrechnung des zu Erwartenden, daß die beiden verschieden schnellen Strahlen auch bei starken Magnetfeldern nur so wenig voneinander verschieden abgelenkt wurden, daß sie noch ihrer ganzen Länge nach zusammenfielen. Ein Beispiel hierfür ist Fig. 9 a, wo die schon erwähnte Reflexionserscheinung sehr auffällig ist, und 9 b. Für alle folgenden Aufnahmen wurde deshalb nicht mehr die Metallbüchse gederet, sondern einmal positiv und das nächste Mal nahe ebenso hoch negativ geladen und die entsprechenden Kurven miteinander verglichen.

Die Aufgabe, möglichst hohe Spannungen für die elektrische Beeinflussung des Kathodenstrahles anzuwenden, mußte gelöst werden durch möglichstes Verbessern des Vakuums und gleichzeitiges Verkürzen der Distanzen der auf verschiedenem Potential befindlichen Metallteile¹⁾, weil nur so erwartet werden konnte, daß die Entladung im Beobachtungsraum aufgehalten sein würde. Die Erreichung eines hierfür günstigen Zustandes war mit großen Schwierigkeiten verbunden, die dadurch teilweise überwunden wurden, daß die ganze Innenwandung der Vakuumröhre von jeglichem Kittmittel oder anderen flüchtigen Substanzen befreit und das Auspumpen teilweise mit zwei Quecksilberpumpen bewerkstelligt wurde. Auf diese Weise gelang es schließlich, Spannungen von etwa 12000 Volt mit einiger Konstanz anzulegen; über 15000 Volt aber kam ich nie hinaus. Die Spannungen wurden durch einen Flüssigkeitswiderstand hindurch von einer 20 plattigen Töplerschen Influenzmaschine geliefert, die von einem Elektromotor in gleichmäßiger, langsamer Umdrehung gehalten wurde. Als Meßinstrument diente ein statisches Hochspannungsvoltmeter mit Kondensator nach Lord Kelvin, das mit der Hochspannungsbatterie und mit Funkenschlagweiten geeicht wurde. Um wenigstens in ihrem weiteren Verlaufe vollständig voneinander getrennte Strahlenzüge zu erreichen, wurden neben der elektrostatischen Beeinflussung auch die Spulenströme etwas variiert.

1) W. Hittorf, Wied. Ann. 21. p. 90. 1884.

11. Von den zahlreichen photographischen Aufnahmen, die schließlich für die Geschwindigkeitsbestimmung gewonnen waren, seien einige ausführlicher mitgeteilt. Zu bemerken ist, daß eventuelle ungleichmäßige Verbreiterungen oder Helligkeitsverteilungen bei rechts oder links abgelenkten Strahlen auf spurenweise nicht exakt horizontale Lage der Platte, auf verschieden lange Exposition oder auf kleine Schwankungen der angelegten Spannung — dieselbe ist auf 300 Volt genau — zurückzuführen wären. Die weiter abgelenkten Strahlen sind im allgemeinen wegen ihrer geringeren Geschwindigkeit weniger intensiv fixiert. In den folgenden Tabellen gibt x den Abstand des betrachteten Kurvenpunktes vom Spalt — die photographischen Platten waren im Innern der Büchse in ihrer Ebene um meßbare Beträge zu verschieben — z_1 und z_2 bedeuten den halben Abstand zweier symmetrischer Kurvenpunkte voneinander. Der in der vierten, sechsten und letzten Kolumne berechnete Ausdruck erscheint der Voraussetzung entsprechend als Konstante.

Tabelle II.

Fig. 4, Taf. IV. $V_1 = 12700$ Volt, $J_1 = 9,03$ Amp. $V_2 = 14800$ Volt, $J_2 = 6,05$ Amp.

x	$\int_0^x dx \int_0^x H dx$	Langsamer Strahl		Schneller Strahl		$\frac{\pi_1'^2}{\pi_2'^2}$
		π_1	$\frac{\pi_1'^2}{[\int dx \int H dx]^2}$	π_2	$\frac{\pi_2'^2}{[\int dx \int H dx]^2}$	
cm		cm		cm		
2,70	3,45	0,062	0,000 322	0,0272	0,0000 621	5,196
2,94	4,60	0,081	310	0,0360	612	5,065
3,22	6,40	0,1105	298	0,0505	622	4,800
3,45	7,95	0,147	335	0,064	645	5,196
3,64	9,90	0,180	321	0,080	653	4,938
3,94	12,50	0,232	336	0,101	646	5,158
4,48	18,44	0,348	345	0,152	655	5,264
		Mittel	0,000 324		0,0000 636	5,088

Es resultiert

$$\underline{V_0 = 34100 \text{ Volt}}, \quad \underline{\frac{e}{\mu} = 1,701 \times 10^7 \text{ C.G.S.}}$$

Tabelle III.

Fig. 10, Taf. IV. $V_1 = 13300$ Volt, $J_1 = 12,98$ Amp.
 $V_2 = 12100$ Volt, $J_2 = 8,77$ Amp.

$x \int_0^x dx \int_0^x H dx$		Langsamer Strahl		Schneller Strahl		$\frac{\alpha_1'^3}{\alpha_2'^2}$
		α_1	$\alpha_1'^3$	α_2	$\alpha_2'^2$	
			$\left[\int_0^x dx \int_0^x H dx \right]^3$		$[dx \int_0^x H dx]^2$	
cm		cm		cm		
2,47	2,68	0,0695	0,000 668	0,0315	0,000 138	4,838
2,80	3,80	0,100	692	0,046	146	4,739
3,09	5,40	0,143	692	0,0665	151	4,580
3,26	6,70	0,180	704	0,083	152	4,606
3,57	9,06	0,2355	664	0,1055	134	4,954
3,75	10,90	0,290	688	0,137	154	4,470
		Mittel 0,000 685		0,000 146		4,698

Es resultiert

$$\underline{V_0 = 35500 \text{ Volt}, \quad \frac{\varepsilon}{\mu} = 1,806 \times 10^7 \text{ C.G.S.}}$$

Für die weiteren Messungen beschränke ich mich auf die Angabe der Endresultate.

Tabelle IV.

Aufnahme Nr.	V_0	$\frac{\varepsilon}{\mu}$
	Volt	C.G.S.
15	34 800	$1,753 \times 10^7$
16	35 700	$1,761 \times 10^7$
17	35 900	$1,738 \times 10^7$
18	35 600	$1,722 \times 10^7$

Zusammen mit den vorhergehenden Angaben erhalten wir im Mittel

$$\underline{V_0 = 35300 \text{ Volt}} \quad \text{und} \quad \underline{\frac{\varepsilon}{\mu} = 1,747 \times 10^7 \text{ C.G.S.}}$$

Die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlung berechnet sich demnach zu

$$\underline{V = 1,11 \times 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}.$$

Um die Exaktheit der Messungen weiterhin zu prüfen und festzustellen, welches Resultat gewonnen werde, wenn sich die Berechnungen auf die direkt gemessene Entladespannung an der Kathode gründen, habe ich auch Beobachtungen mit der Influenzmaschine ausgeführt, indem ich den Strahl, der mit einer bekannten aber durchweg kleineren Spannung erzeugt wurde, in manchen Fällen in seinem Verlauf elektrostatisch beeinflußt, durch das oben benutzte gleiche Magnetfeld ablenkte und das Bild auf einem vertikalen Phosphoreszenzschirm beobachtete. Der zurückgelegte Weg betrug einmal 4,5 cm, das andere Mal 4,9 cm. Die folgende Tabelle enthält die Resultate.

Tabelle V.

V_0	V_1	$V_0 \pm V_1$	$\int_0^x dx \int_0^x H dx$	z' korr.	J	$\frac{2 \pi^2 \cdot V}{J^2}$	$\frac{\epsilon}{\mu} \times 10^{-7}$
Volt	Volt	Volt		cm	Amp.		C.G.S.
3000	—	3000	18,5	0,507	4,95	62,946	1,839
3400	—	3400	"	0,380	3,96	62,614	1,830
5250	—	5250	"	0,450	5,80	63,206	1,847
6500	-3400	3100	"	0,587	"	63,493	1,855
6800	—	6800	"	0,270	3,96	63,222	1,848
5500	—	5500	24,5	0,581	5,80	110,359	1,838
8700	—	8700	"	0,584	7,30	111,342	1,855
10400	-3450	6950	"	0,355	3,96	111,682	1,860
11600	-3850	7750	"	0,618	7,30	111,080	1,851

Mittel 1,847

Die zwei verschiedenen Methoden, die sich nicht nur unterscheiden durch die Größe der in beiden Fällen benutzten Strahlgeschwindigkeiten, sondern auch durch die Wahl der Voraussetzungen, indem im ersten Fall der Rechnung diejenige besonders experimentell ermittelte Spannungsdifferenz zugrunde gelegt ist, die in der Tat für die Geschwindigkeiterteilung maßgebend ist — unabhängig davon, ob die Spannung an der Kathode direkt dieselbe wäre oder nicht — während im zweiten Fall die direkt gemessene Kathodenspannung maßgebend ist, führen zu Resultaten für ϵ/μ , die zwar wenig aber doch merklich voneinander abweichen. Es entsteht die Frage, welcher

der genannten möglichen Ursachen die Abweichung zuzuschreiben wäre. Die Antwort ergibt sich durch den Hinweis auf die von Hrn. Lenard¹⁾ gesuchte, zuerst von Hrn. Kaufmann²⁾ und späterhin sehr deutlich von Hrn. Paschen³⁾ nachgewiesene Abhängigkeit der Größe ε/μ von der Geschwindigkeit der Strahlen, wie dieselbe im Einklang steht mit der Theorie, welche von der Annahme einer rein elektromagnetischen Masse der Quanten ausgeht. Nach einer von Hrn. Abraham⁴⁾ angegebenen Formel würde sich ε/μ für eine beliebige Strahlgeschwindigkeit v darstellen lassen durch

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)_0 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\psi(\beta)},$$

worin $(\varepsilon/\mu)_0$ der für kleinere Geschwindigkeiten konstante Wert, $\beta = v/c$, c die Lichtgeschwindigkeit ist, und

$$\psi(\beta) = \frac{1}{\beta^2} \cdot \left[\frac{1 + \beta^2}{2\beta} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 1 \right].$$

Setzt man $(\varepsilon/\mu)_0 = 1,847 \times 10^7$, so würde sich für die größere Strahlgeschwindigkeit $\varepsilon/\mu = 1,749 \times 10^7$ ergeben, eine Zahl, die mit der experimentell gefundenen vollkommen übereinstimmt.

Eine ähnliche Abhängigkeit der Größe ε/μ von der Geschwindigkeit hat auch schon Hr. Starke⁵⁾ konstatiert.

Aus dem Mitgeteilten ergibt sich danach endgültig, daß in der Tat das volle Potential an der Kathode im Sinne einer Geschwindigkeitserteilung an das Strahlquantum wirkt, so daß weder anzunehmen wäre, daß ein merklicher Teil der Spannungsdifferenz zur Überwindung gewisser Widerstände verbraucht wird, noch daß das Quant seine Bahn mit der Geschwindigkeit Null⁶⁾ anfangend beginnen würde in einem Punkt, der merklich außerhalb der Kathode läge.

Für ε/μ scheint $1,8 \cdot 10^7$ C.G.S. für langsame Strahlen nun definitiv sicher zu sein.

1) P. Lenard, Wied. Ann. 65. p. 504. 1898.

2) W. Kaufmann, Gött. Nachr. 2. p. 143. 1901.

3) F. Paschen, Ann. d. Phys. 14. p. 389. 1904.

4) M. Abraham, Gött. Nachr. Heft 1. 1902.

5) H. Starke, Verhandl. d. Phys. Gesellsch. 5. p. 241. 1903.

6) oder nahe Null.

2. Absorption in festen Körpern.

13. Fallen Kathodenstrahlen von der Intensität i_0 auf ein dünnes Metallblättchen von der Dicke d cm, so stellt sich der durchgelassene Betrag dar durch die Beziehung $J = i_0 e^{-\alpha d}$, worin α den Absorptionskoeffizient des Blättchens für die betrachteten Strahlen bedeutet. Die einfachste Methode zur Bestimmung von α bestände danach in der Messung von i_0 und J , woraus α sich als $1/d \cdot \log i_0/J$ fände. Es muß aber offenbar der so ermittelte Wert wesentlich gefälscht sein, wenn nicht gleichzeitig die Vorgänge berücksichtigt werden, die nach neueren Untersuchungen mit dem Auftreffen von Kathodenstrahlen auf einen Körper verknüpft sind. Es ist bekannt, daß an der Oberfläche eine Art Reflexion stattfindet, über deren Wesen allerdings noch geteilte Anschauungen bestehen. Es könnte nämlich zweifelhaft erscheinen, ob die sogenannten zurückgeworfenen Strahlen aus denselben Quanten bestehen wie die auffallenden, indem neuere Versuche besonders von Hrn. Lenard¹⁾ anzeigen, daß die Quanten bei ihrem Zusammenstoß mit Teilchen des Körpers eine neue Kathodenstrahlung auslösen. Nach manchen Anschauungen würden die reflektierten Strahlen der Hauptsache nach durch sekundäre Emission entstehen. Die Herren Austin und Starke²⁾ dagegen stellen das Vorhandensein von sekundärer Emission bei normaler Inzidenz der primären Strahlen in Abrede, und Hr. Starke³⁾ weist für diesen Fall kräftige Reflexion nach.

14. Es wird sich zwar im folgenden zeigen, daß die Absorptionskoeffizienten auch gewonnen werden können ohne Kenntnis der im vorhergehenden skizzierten Verhältnisse. Trotzdem habe ich versucht, die besprochenen Erscheinungen mit den Mitteln der gegenwärtigen Arbeit experimentell zu erforschen, insbesondere festzustellen, inwieweit ein Bestehen primärer Reflexion neben sekundärer Emission anzunehmen wäre. Denn die mitzuteilenden Untersuchungen mußten, auch

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 15. p. 485. 1904.

2) L. Austin u. H. Starke, Ann. d. Phys. 9. p. 271. 1902.

3) H. Starke, Wied. Ann. 66. p. 49. 1898; Ann. d. Phys. 3. p. 75. 1900.

soweit sie sich nur mit den Vorgängen bei der Absorption beschäftigen, ohne weiteres gewisse Anhaltspunkte für eine einigermaßen zutreffende Beantwortung dieses Problems bieten, da durch sie die Kenntnis sowohl der auffallenden als auch der absorbierten und durchgehenden Strahlungsintensität für ein beliebiges Metallblättchen zu gewinnen war.

Es werde ausdrücklich darauf hingewiesen, daß in allen Fällen, wo von einer „Reflexion“ primärer Strahlen die Rede ist, nichts ausgesagt werden soll über das Wesen dieses Vorganges; vielmehr soll unter der „reflektierten“ Primärstrahlung nur verstanden sein diejenige Quantenmenge, welche nachweislich an der Oberfläche des festen Körpers für den in seiner ursprünglichen Richtung weitergehenden Primärstrahl verloren geht und in entgegengesetzter Richtung vom Metall ausstrahlt. Es ist dabei gleichgültig, ob dieser zurückgeworfene Teil eine Geschwindigkeitseinbuße erleidet oder nicht, wenn dieselbe nur nicht wesentlich mehr als etwa 90 Proz. der Primärgeschwindigkeit beträgt (vgl. 37).

Unter der *sekundären* Strahlung ist eine neu zur primären hinzukommende zu verstehen, die ihre Ladung nicht von dieser, sondern von den von primären Strahlen durchquerten Atomen der Materie entnimmt. Außerdem soll den sekundären Strahlen nach Versuchen von Hrn. Lenard eine sehr kleine Geschwindigkeit zugeschrieben werden, die es ihnen unmöglich macht, auch die dünnsten Schichten fester Körper merklich zu durchdringen. Daß diese den Erfahrungen an langsamen Primärstrahlen entnommene Voraussetzung für den gegenwärtigen Fall relativ großer Primärgeschwindigkeiten zutrifft, wird die Beobachtung bestätigen (38).

Der für die folgenden Versuche maßgebende Gedankengang ist folgender:

Um den Absorptionskoeffizient α eines beliebigen Metalles zu bestimmen, lassen wir einen Kathodenstrahl von der im 1. Abschnitt ermittelten Geschwindigkeit auf das Blättchen vertikal auffallen; seine Anfangsintensität sei i_0 . Er erleide an der Oberfläche eine teilweise Reflexion, deren Größe i_0 proportional und im übrigen nur von der reflektierenden Substanz abhängig sei; der reflektierte Bruchteil sei also $k i_0$,

wo wir k den Reflexionskoeffizienten nennen. Der primäre Strahl erzeuge beim Auftreffen eine gewisse Sekundärstrahlung, die ebenfalls der Anfangsintensität i_0 proportional sei; sie betrage λi_0 . Dann ist die Summe der reflektierten Strahlen durch $i_0(k + \lambda)$ gegeben. Da hiervon der zweite Teil λi_0 für den Absorptionsvorgang nicht in Betracht kommt, ist die vom Blättchen durchgelassene Strahlenmenge $J = i_0(1 - k)e^{-\alpha d}$. Fügt man noch die Annahme hinzu, daß sekundäre Emission nach allen Richtungen erfolge — ob von gleichem Betrag oder nicht, mag vorerst dahingestellt bleiben — so kommt zu der vom Metall durchgelassenen Menge noch die Sekundärstrahlung von der Hinterfläche in der Größe $\sigma i_0(1 - k)e^{-\alpha d}$ hinzu — dieselbe ist der an dieser Fläche auftretenden primären Intensität proportional gesetzt. Sekundäre Strahlung aus dem Innern des Metalles ist wegen der äußerst geringen Geschwindigkeit und der deshalb sehr starken Absorption derselben nicht anzunehmen. Die gesamte vom Blättchen austretende Intensität wäre demnach:

$$J = i_0(1 - k)e^{-\alpha d}\{1 + \sigma\}.$$

15. Die nächstliegende Aufgabe der Untersuchung mußte darin gesehen werden, die soeben von vornherein aufgestellten Formeln mit den Resultaten des passend gewählten Experimentes zu vergleichen. Wenn auf diese Weise die mitgeteilten Vorstellungen nur die Richtschnur für die Versuche zur Beantwortung des in (14) gegebenen Problems sein sollen, so sagen sie zunächst nichts aus über die Tatsachen, deren Kenntnis erst die experimentelle Beobachtung liefern kann. Ebenso wenig bedeuten die Formeln irgend eine Beschränkung für das Folgende, da die Größe der eingeführten Koeffizienten in keiner Weise vorausbestimmt ist. Vielmehr bestände immerhin noch die Möglichkeit, daß der eine oder andere Koeffizient sich im Versuch als Null ergäbe, womit die entsprechende Annahme erledigt wäre, oder als inkonstant, womit die Forderung einer Modifikation der gemachten Annahmen aufträte.

Wir wenden uns zur Besprechung der für eine elektrometrische Messung der besprochenen Größen möglichen Methoden und dehnen auf sie die gemachten Annahmen aus.

a) Der Paraffinkondensator.

16. In einer früheren Arbeit¹⁾ ist gezeigt worden, daß zur elektrometrischen Intensitätsmessung kleine Kondensatorplatten von Vorteil sind, die mit einer sehr dünnen isolierenden Paraffinschicht bedeckt und durch eine darübergelegte geerdete Aluminiumfolie gegen elektrische Störungen geschützt sind. Die hiermit aufgesammelte und ins Elektrometer überführbare Strahlenmenge stellte sich durch eine Summe

$$J = i_0 e^{-\beta d} + \frac{i_0}{d \beta^2} \left(1 - \frac{1 + \beta d}{e^{\beta d}} \right)$$

dar, wo das erste Glied die den Kondensator vollkommen durchdringende Kathodenstrahlung, das zweite Glied die durch Influenzwirkung freiwerdende Elektrizitätsmenge darstellt (β ist der Absorptionskoeffizient des Paraffins und d die Dicke). Man ersieht, daß die gemessene Intensität zwar nicht identisch aber doch in allen Fällen der ursprünglichen Strahlenmenge i_0 proportional ist, so daß wir die Möglichkeit besitzen, relative Änderungen von i_0 quantitativ mit dem Paraffinkondensator zu verfolgen. Daran ändert weder die Annahme einer kleinen Reflexion noch sekundärer Strahlung im Innern des Kondensators etwas, da auch diese der Anfangsintensität i_0 proportional zu setzen wären und deshalb nur den Proportionalitätsfaktor modifizieren könnten, der aber bei relativen Messungen herausfällt.

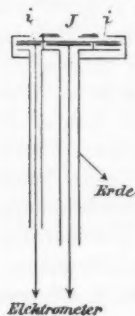


Fig. 3.

17. Der benutzte Paraffinkondensator ist in Fig. 3 dargestellt. Er besteht aus einer Aluminiumscheibe von 0,8 cm Durchmesser, die in der Öffnung eines breiten, gleichdicken Aluminiumringes ii von diesem durch Siegelack isoliert und durch eine zwischengelegte geerdete Scheidewand elektrisch vollkommen abgeschlossen ist. Beide in einer Ebene liegenden Metallteile waren gemeinsam auf Schmirgelpapier abgerieben, glatt poliert und danach mit einer sehr dünnen Paraffinschicht und dünner abgeleiteter Aluminiumfolie bedeckt. Über die

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 13. p. 394. 1904.

Folie ist ein gleichgroßer Metalldeckel auf $\frac{1}{2}$ mm Abstand geschoben, der in der Mitte eine 4,5 mm weite Öffnung hat und mehrere Millimeter davon abstehend einen $\frac{1}{2}$ mm breiten peripherischen Einschnitt, durch den seitlich verlaufende Strahlen die Ringelektrode treffen können, die als Kontrollelektrode benutzt wird. Die zentrale Öffnung ist entweder frei und gestattet so dem Hauptstrahlenbündel den Eintritt in den zentralen Teil des Paraffinkondensators, oder sie wird mit dünnen Blättchen bedeckt, die von einem ebenfalls ausgeschnittenen und darüber zu legenden dünnen Messingscheibchen festgehalten und mit dem ganzen Metalldeckel zur Erde geleitet sind. Dieser Deckel besteht aus dünnstem Messing, und die Ränder der zentralen Öffnung sind außerdem möglichst abgeschrägt, damit keine Strahlen an den Seitenwänden der Öffnung verloren gehen. Es zeigte sich diese Vorsicht als notwendig, wenn die Absorptionskoeffizienten einwandfrei werden sollten.

Der beschriebene Apparat wurde in die Fig. 1 gezeigte Versuchsröhre horizontal eingeführt und an den geerdeten Messingröhrchen, welche die Drahtleitungen elektrisch schützen sollten, am Glasschliff der Röhre so befestigt, daß die zentrale Öffnung in der Achse der Kathodenröhre und etwa 2 cm vom Fenster entfernt stand. Eine am Schliff angebrachte Marke gestattete in allen Fällen die ursprüngliche Orientierung, wenn der Kondensator zwecks Auflegens neuer Blättchen herausgenommen werden mußte. Um möglichst große Ausschläge zu erzielen, wurde die Versuchsröhre für jede Messung bis auf mindestens 1 mm evakuiert. Die Hauptelektrode stand durch Vermittlung mehrerer Schalter direkt mit dem empfindlichen Quadrantelektrometer in Verbindung, dessen Ausschläge durch ein 1,5 m entferntes Fernrohr abgelesen wurden. In die Leitung konnten beliebige Kapazitäten eingefügt werden, wenn die Ausschläge geeignete Reduktionen erfahren sollten. Die Kontrollelektrode stand ebenfalls durch einige Schalter mit einer kleinen Leidener Flasche in Verbindung, deren Ladung zu beliebiger Zeit durch das Quadrantelektrometer zu messen war.

Die Messungen wurden dann in folgender Weise ausgeführt. Nachdem die richtige Verdünnung in der Kathodenröhre hergestellt war, wurde das Quadrantelektrometer und die erwähnte

Leidener Flasche von Erde isoliert und dann rasch hintereinander mit der Hand 1—6 Entladungen ausgelöst. Danach wurden die beiden Elektroden, um eventuelle Ladungsverluste durch Leitendwerden des Paraffins auszuschließen, von den übrigen Metallteilen abgeschaltet und geerdet. Im Quadrantenelektrometer wurde die aufgefangene Hauptstrahlintensität gemessen, dann eine gemessene Zeit Erdverbindung hergestellt, und darauf die in der Leidener Flasche aufgesammelte Ladung der Kontrollelektrode gemessen. Verluste wurden durchweg berücksichtigt, und Störungen durch äußere elektrische Kräfte waren ausgeschlossen, da sich alle stromtragenden Teile in geerdeten dichten Hüllen befanden. Solcher Einzelmessungen sind für jedes Blättchen etwa 10—15 vorgenommen worden, deren Mittelwert der Rechnung zugrunde gelegt wurde. Da sich fand, daß der Paraffinkondensator kleinen Schwankungen seiner Empfindlichkeit unterworfen war, habe ich die für ein Metallblättchen ausgeführten Messungen jeweils zwischen zwei Beobachtungsreihen mit offenem Fenster gestellt. Von großem und für genaue Untersuchungen nicht zu entbehrendem Vorteil erwies sich die Kontrollvorrichtung, welche die Messungen von den unvermeidlichen Schwankungen der Anfangsintensität nahezu vollständig unabhängig machte und den direkten Vergleich zeitlich nacheinander ausgeführter Versuche miteinander erst ermöglichte. Ein Beispiel, wie es für unbedecktes Fenster des Paraffinkondensators gilt, mag die Genauigkeit der Messung illustrieren:

Tabelle VI.

Zahl der Entladungen	Haupt- Kondensator	Kontroll-	Verhältnis
3 (1 F.)	12,8 cm	18,85 cm	0,679
5 (2 F.)	19,35	27,75	0,697
1	4,95	7,43	0,666
4 (1 F.)	24,0	34,6	0,693
2 (2 F.)	21,4	31,3	0,684
3 (2 F.)	8,5	12,35	0,688
5 (3 F.)	18,2	27,25	0,668
			0,682

Die in Klammern beigefügten Bemerkungen der ersten Kolumne geben die Zahl der Funken an, welche mit den Ent-

ladungen gleichzeitig übergangen. Es ist ersichtlich, daß Schwankungen in den Ausschlägen von 5–24 cm des Hauptkondensators jeweils von den entsprechenden Angaben des Kontrollkondensators begleitet sind, so daß der Quotient aus zwei entsprechenden Zahlen so nahe konstant wird, wie es bei der Unbestimmtheit solcher Beobachtungen nur erwartet werden kann. Da danach dem Ausschlag des Hauptkondensators immer nur dann eine Bedeutung beigelegt werden kann, wenn der ihn begleitende Kontrollkondensatorauschlag bekannt ist, so sind im folgenden statt der ersteren immer die Quotienten beider Ausschläge als Maß gesetzt für die gemessene Intensität. Daß Vergleiche nur dann möglich sind, wenn die Angaben alle auf gleiche Kapazität bezogen sind, ist selbstverständlich.

18. Die auf den Kondensator auftreffende Anfangsintensität i_0 markiert sich dem unter (16) Gesagten entsprechend durch eine Intensität $J_0 = f i_0 (1 - k_a)$ im Elektrometer, wo k_a der Reflexionskoeffizient für Aluminium und f ein Proportionalitätsfaktor sei. Die an der Oberfläche eventuell auftretende Sekundärstrahlung kommt für die Ausschläge des Elektrometers nicht in Betracht. Wird nun vor den Paraffinkondensator ein dünnes Metallblättchen in den Gang der Strahlen gebracht, so muß die obige Intensität gemäß (13) in

$$J_m = i_0 (1 - k_\mu) e^{-\alpha d} \{1 - k_a\} \cdot f$$

übergehen, wenn k_μ der Reflexionskoeffizient des beliebigen Metalles, k_a immer derjenige des Aluminiums bedeute. Dabei ist allerdings nicht berücksichtigt, daß ein Teil des von der Aluminiumbelegung reflektierten Kathodenstrahles nach abermaliger Reflexion am gegenüberstehenden Metall wieder den Paraffinkondensator trifft. Bringt man diese Korrektur an, so wird

$$J_m = i_0 (1 - k_\mu) e^{-\alpha d} \{1 - k_a + \gamma \cdot k_a k_\mu\} \cdot f.$$

Die Größe γ ist eine zahlenmäßig zu ermittelnde Konstante, welche dem Umstand Rechnung tragen soll, daß noch weitere Reflexionen anzunehmen wären und daß infolge diffuser Zerstreuung nicht alle durch die Reflexionskoeffizienten konstatierten Quanten meßbar werden. Es mag bemerkt werden,

daß eine ungenaue Bestimmung dieser Größe auf die Resultate nur von verschwindendem Einfluß ist.

19. Einiger Erörterung bedarf noch der Faktor f ; wir fragen, ob derselbe eine unveränderliche Konstante darstellt oder nicht. Ist das Fenster unbedeckt, so fallen die Kathodenstrahlen als nahezu paralleles Bündel auf das Paraffin und die auffallende Metallplatte; sie werden im Paraffin zwar diffus verlaufen, aber doch mit ihrer größten Intensität um so weniger von der Normalen abweichen, je dünner die Paraffinschicht ist. Treten die Strahlen zuerst durch ein Metallblättchen, so verlassen sie es mehr oder weniger diffus, um danach völlig diffus im Paraffin weiterzugehen. Da hierbei der zurückzulegende Weg verlängert wird, muß die Absorption wachsen. Um über die tatsächlichen Verhältnisse Aufschluß zu bekommen, habe ich einen geeigneten Versuch ausgeführt, der zu dem Resultat führte, daß die Veränderung des Elektrometerausschlages bei der Einführung von Aluminiumblättchen bis zu etwa 0,001 cm Dicke einer Zunahme der mittleren Strahlenneigung um ca. 17° entspricht. Die Dicke der Paraffinschicht läßt sich nun mit einiger Annäherung ebenso wie f berechnen; ich fand für meinen Kondensator $d = 0,00065$ cm und $f = 0,295$. Der obigen Neigungszunahme würde daher eine Vermehrung des Weges auf 0,000679 cm und eine Verminderung von f auf 0,283 entsprechen. Das Verhältnis von $f/f' = 1,042$ wäre die im Maximum zu erwartende Korrektur beim Vergleich von Ausschlägen, die mit und ohne Metallblättchen erhalten wurden.

20. Wird das Fenster des Kondensators nacheinander mit zwei Metallblättchen benachbarter Dicken bedeckt, so gilt für die im Elektrometer gemessenen Intensitäten

$$J_m = f i_0 (1 - k_\mu) \cdot e^{-\alpha d} \{1 - k_\alpha + \gamma k_\alpha k_\mu\},$$

$$J'_m = f' i_0 (1 - k_\mu) \cdot e^{-\alpha d'} \{1 - k_\alpha + \gamma k_\alpha k_\mu\}.$$

Da $f = f'$ zu betrachten ist, ergibt sich durch Division

$$\frac{J_m}{J'_m} = e^{\alpha(d' - d)} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{1}{d' - d} \cdot \log \frac{J_m}{J'_m}.$$

Die Forderung benachbarter Dicken ist begründet durch die Erwägung, daß sich für sehr verschiedene Dicken desselben Metalles sowohl k_μ als α eventuell ändern könnte. Die ab-

geleitete Formel bietet so die Möglichkeit der einfachen Bestimmung von α .

Bestände nun keine Beeinflussung der Strahlen an der Metalloberfläche, so müßte sich α nach derselben Gleichung berechnen lassen, wenn statt $J_m = J_0$ gesetzt würde. Im anderen Fall aber stellt sich die obige Beziehung nach Kenntnis von α sehr einfach dar und unmittelbar geeignet zur Bestimmung der Reflexionskoeffizienten. Werden zunächst nur Aluminiumblättchen untersucht, so ist $k_\mu = k_a$, und es folgt

$$\frac{J_0}{J_m} = \frac{e^{\alpha d}}{1 - k_a + \gamma k_a^2}$$

(die Korrektur für f sei schon angebracht), woraus der Reflexionskoeffizient für die primären Strahlen sich durch

$$k_a - \gamma k_a^2 = 1 - \frac{e^{\alpha d}}{J_0/J_m}$$

berechnen läßt. Ist aber k_a gefunden, so erhält man k_μ für beliebige Metalle, deren α nach der Methode benachbarter Dicken gefunden ist. Der Paraffinkondensator liefert also außer den Absorptionskoeffizienten auch die Reflexionskonstanten k_a und k_μ .

21. Die Messungen sind ausgeführt für Aluminium, Blattmetall, Silber, Gold und Glimmer. Die Dicken der benutzten Blättchen wurden möglichst variiert und einzeln durch sorgfältiges Auswägen ausgemessener Flächenstückchen bestimmt. Die benutzten Gewichte sind mit Hilfe des spezifischen Gewichtes der Luft kontrolliert und mit dem Normalgewichtssatz des Instituts verglichen. Die Mehrzahl der Blättchen sind vollkommen lochfrei, nur in einzelnen Fällen kamen auch Blättchen mit Löchern zur Verwendung, dann nämlich, wenn sehr dünne und nie lochfrei zu erhaltende Blättchen untersucht werden sollten oder wenn die zur Verfügung stehenden lochfreien Blättchen so dick waren, daß sie die Kathodenstrahlen nicht mehr merklich durchließen. In allen Fällen wurden die Löcher mit möglichster Genauigkeit nach Zahl und Größe bestimmt, um einigermaßen zutreffend angeben zu können, welcher Bruchteil der Gesamtfläche von Löchern ausgefüllt ist. Dann ließ sich die Korrektur, die an den Messungs-

ergebnissen anzubringen war, um sie auf völlig lochfreie Blättchen übertragen zu können, sehr nahe berechnen.

Der Rechnung ist die Annahme rechteckiger Metaldicken, d. h. von Löchern mit nur vertikalen Rändern zugrunde gelegt. Es ist die Berechtigung hierzu sehr wahrscheinlich, wie es auch die Beobachtungen an Gold- und Silberblättchen nahelegen. Übrigens würde auch bei anderen Annahmen das Resultat nicht wesentlich verschieden ausfallen.

a) Ein Blättchen, bei dem $1/n$ der Gesamtfläche von Löchern bedeckt ist; die wahre Metalldicke, die aus dem Ergebnis der Wägung unter Benutzung des für $1/n$ gefundenen Wertes zu korrigieren ist, sei d . Dann ist ohne Löcher

$$J_m = f i_0 (1 - k_\mu) e^{-\alpha d} \{1 - k_a + \gamma k_a k_\mu\},$$

mit $1/n$ Löchern

$$J'_m = f i_0 \frac{n-1}{n} (1 - k_\mu) e^{-\alpha d} \{1 - k_a + \gamma k_a k_\mu\} \\ + f i_0 \frac{1}{n} (1 - k_a + \gamma k_a^2).$$

Daraus wird

$$J_m = J'_m \frac{1 - k_\mu}{\frac{n-1}{n} (1 - k_\mu) + \frac{1}{n} e^{\alpha d}},$$

worin J'_m der für das löcherige, und J_m der für das gleichdicke lochfreie Blättchen gefundene Wert der Intensität bedeutet. Die Kenntnis von k_μ und α ist an lochfreien Blättchen zu gewinnen.

b) Zwei Blättchen werden übereinander gelegt; es tritt dann fast ausnahmslos der Fall ein, daß so gut wie alle Löcher verdeckt werden derart, daß sich die Kombination im Auerlicht völlig undurchlässig erweist. Sind die beiden wahren Metaldicken d_1 und d_2 , so ist die Korrektur

$$J_m = J'_m \frac{n}{e^{\alpha d_1} + \frac{n-1}{n} e^{\alpha d_2} + \frac{(n-1)^2}{n}},$$

dieselbe hängt also nur noch vom Absorptionskoeffizienten ab. In ähnlicher Weise lassen sich beliebige Kombinationen korrigieren.

22. Es werde noch darauf hingewiesen, daß Veränderungen der Metallblättchen, wie sie von Hrn. Seitz¹⁾ angegeben werden,

1) W. Seitz, Ann. d. Phys. 6. p. 1. 1901.

sich niemals störend bemerkbar machten; ein Blättchen, das lochfrei in den Apparat eingesetzt wurde, erwies sich auch bei der Prüfung nach dem Versuch vollkommen lochfrei; auch deuteten die Ausschläge des Elektrometers niemals auf derlei Veränderungen hin. Die Blättchen waren nie länger als etwa 1 Stunde den Strahlen ausgesetzt, und um schädliche Einflüsse von Quecksilberdämpfen des Vakuums auszuschließen, waren immer mehrere dünne Blättchen von echtem Gold in der Versuchsröhre ausgebreitet, die sich auch nach längerer Zeit merkbar angegriffen zeigten. Ich möchte daraus schließen, daß schädliche Wirkung wohl eher dem Quecksilberdampf als den Kathodenstrahlen beigemessen werden muß. Es mag die Angabe von Interesse sein, daß das zu den Versuchen benutzte Aluminiumfenster von nur 0,000284 cm Dicke eine halbjährige Dauer täglicher zahlreicher Versuche ohne Schaden aushielt.

23. *Messungen.* Die in den folgenden Tabellen unter „Bemerkung“ gemachten Angaben beziehen sich auf die Zahl der eventuell kombinierten Blättchen und auf die eventuelle Beobachtung von Löchern. Die mitgeteilten Werte für die Intensitäten sind jeweils Mittel aus etwa 10–15 mit Kontroll-elektrode ausgeführten Einzelbeobachtungen.

Aluminium.¹⁾

Tabelle VII.

Nr.	d cm	Bem. 1/n	J_0	J_m	J_0/J_m	Hieraus	J_m/J'_m	α	Aus J_0/J_m α_0
1	0,0001328	2 $\frac{1}{10}$	2,265	1,0545	2,148	1 u. 3 2 u. 3 3 u. 4 4 u. 5 5 u. 6 6 u. 7 6 u. 8	1,961	4453	5750
2	0,0001328	2 $\frac{1}{10}$	2,036	1,002	2,164		1,946	4403	5810
3	0,000284	1 0	0,782	0,1856	4,212		1,827	4447	5060
4	0,0004195	1 0	4,328	0,5624	7,695		1,880	4461	4900
5	0,000561	1 0	4,819	0,3329	14,473		3,874	4382	4760
6	0,000870	1 0	4,735	0,0844	56,068		3,034	4404	4620
7	0,001122	2 0	4,819	0,0283	169,892		3,056	4433	4570
8	0,001122	2 0	3,860	0,0225	171,352				
Im Mittel								4426	5067

1) Eine große Auswahl aller Dicken wurde mir von der Firma J. Trump, Nürnberg, freundlich zur Verfügung gestellt.

Die nach der in (18) abgeleiteten Formel berechneten α -Werte, die von Reflexionsvorgängen unabhängig sind, erweisen sich für Dicken, die um nahe das Zehnfache des Anfangswertes voneinander verschieden sind, so konstant, wie das nur erwartet werden kann. Demgegenüber sind die aus der einfachen Absorptionsformel (13) berechneten Werte, die keine Reflexionsvorgänge annimmt, durchweg zu groß; die Abweichung muß sich bei kleinen Dicken um so mehr zeigen, als hier die Absorption verhältnismäßig gering und deshalb der Einfluß des Verlustes an der Oberfläche noch relativ beträchtlich ist. Auch die von Hrn. Lenard¹⁾ früher gefundenen Zahlen lassen einen ähnlichen Gang mit der Blättchendicke erkennen.

Unter Zugrundelegung des Mittelwertes $\alpha = 4426$ kann jetzt nach einer früher (18) gegebenen Beziehung der Reflexionskoeffizient k_a ermittelt werden.

Tabelle VIII.

 $\gamma = 0,8.$

d cm	J_0/J_m	J_0/J_m korrigiert	$e^{\alpha d}$	k_a
0,000284	4,212	4,130	3,514	0,175
0,0004195	7,695	7,544	6,398	0,178
0,000561	14,473	14,190	11,966	0,185
0,000870	56,068	54,446	46,980	0,158
0,001122	171,352	166,361	143,300	0,161
Im Mittel				0,172

Wir gewinnen durch diese Resultate die Auffassung, daß an der Oberfläche des Aluminiums ein Verlust an primären Strahlen eintritt, der im Mittel 17 Proz. der gesamten ankommenden Strahlung beträgt. Da die k_a keinen Gang mit der Dicke zeigen, der außerhalb der Fehlergrenze läge, ist zu schließen, daß diese Reflexionserscheinung ihrer Größe nach unabhängig ist von der Dicke, soweit als sie im vorliegenden Fall überhaupt in Frage kam. Die genügende Übereinstimmung der Werte miteinander deutet hin auf die Wahrscheinlichkeit, daß die Verhältnisse bei mehrfacher Reflexion durch die gemachten Annahmen befriedigend wiedergegeben sind.

1) P. Lenard, Wied. Ann. 56. p. 267. 1895.

Glimmer.

Von Nichtmetallen ist nur Glimmer in einigen Dicken untersucht worden, da es in diesen Fällen infolge der leicht störenden Oberflächenladung dieser Substanzen nicht angängig ist, die einfachen Annahmen zugrunde zu legen, die für abgeleitete Metallblättchen berechtigt erscheinen. Von Interesse konnte hier deshalb nur die Größe des Absorptionskoeffizienten sein, und die gleichzeitige gelegentliche Festsetzung von k_μ kann nur als nebensächlich betrachtet werden.

Tabelle IX.

Nr.	d cm	Bem.	J_0/J_m	Hieraus	J_m/J'_m	α	Aus J_0/J_m α_0
1	0,000235	1 0	5,939	} 1 u. 2 2 u. 3 2 u. 4 3 u. 4	2,704	4814	7570
2	0,0004416	1 0	16,061		1,833	4750	6280
3	0,000569	1 0	29,441		14,874	4744	5940
4	0,0010106	1 0	238,896		8,114	4740	5410
—	—	—	—		Mittel 4762		6300

Nr. 2 und 3 sind die beiden Spaltstücke von 4; sie wurden ebenso wie dieses unter dem Polarisationsapparat auf gleichmäßige Schichtdicke geprüft, und ihre Dicke ist gemessen sowohl durch Auswägen unter Zugrundelegung des Wertes $\sigma=2,8$, als auch durch Farbenbestimmung und Vergleich mit der entsprechenden Luftschicht bei Newtonschen Ringen.

Die bedeutende Abweichung des konstanten α von α_0 deutet auf einen großen Verlust durch Reflexion hin, wie aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich wird.

Tabelle X.

d cm	J_0/J_m korrigiert	$e^{\alpha d}$	k_μ
0,000235	5,766	3,062	0,511
0,0004416	15,593	8,190	0,514
0,000569	28,583	15,015	0,514
0,0010106	227,520	123,000	0,503
		Mittel 0,510	

Blattmetall.

Die Beobachtungen waren hier erschwert durch die in manchen Fällen vorkommenden zahlreichen Löcher und die große Inhomogenität der Dicke. — Blättchen aus demselben größeren Stück geschnitten waren oft sehr verschieden dick.

Tabelle XI.

Nr.	d cm	Bem.	J_0/J_m	Hieraus	J_m/J'_m	α	Aus J_0/J_m α_0
1	0,0000483	1 0	2,879	1 u. 2	1,222	11884	21800
2	0,0000652	2 $\frac{1}{2}$	3,519	2 u. 4	12,601	11801	19280
3	0,0000964	1 0	5,121	2 u. 3	1,777	11902	16920
4	0,000263	1 0	36,278	3 u. 4	7,083	11765	13640
5	0,000520	1 0	865,637	4 u. 5	23,861	12061	13000
—	—	—	—	1 u. 4	10,553	11913	—
Mittel						11888	16930

Tabelle XII.

 $\alpha = 11888.$ $\gamma = 0,8.$

d cm	J_0/J_m korrigiert	$e^{\alpha d}$	k_μ
0,0000483	2,822	1,776	0,408
0,0000964	5,020	3,153	0,411
0,000263	35,221	22,796	0,390
0,000526	832,343	519,644	0,418
Mittel			0,407

Der Verlust durch Reflexion beträgt hier 40 Proz. der Gesamtstrahlung und ist ebenso wie beim Aluminium nicht merklich von der Dicke abhängig.

Silber.

Da hier nur wenige Dicken zur Verfügung standen, die einigermaßen lochfrei waren bei genügender Durchlässigkeit für die Kathodenstrahlen, so konnten leider nur eine geringere Zahl einwandfreier Messungen ausgeführt werden. Denn wenn zwar die eingeführten Korrekturen zu guten Näherungswerten

führen, werden doch die Resultate sehr unsicher, wenn einmal die Gesamtfläche der Löcher $\frac{1}{4}$ der ganzen Metallfläche ausmacht, wie das hier manchmal vorkam; denn dann ist die Voraussetzung sicher unrichtig, daß die übrige Metallschicht von homogener Dicke wäre. Ich half mir in der Weise, daß ich mehrere mit der Wage nahezu gleichdick gefundene Blättchen einzeln auf Absorption untersuchte, an jedem einzeln die Korrekturen anbrachte und aus den entsprechenden Versuchsdaten dann das Mittel nahm. Diese Mittel erst sind bei den beiden ersten Dicken verzeichnet; ihre Abweichungen betrugen im Maximum 9 Proz.

Tabelle XIII.

Nr.	d cm	Bem.	J_0	J_m	J_0/J_m	Hieraus	J_m/J'_m	α	Aus J_0/J_m α_0
1	0,0000185	1 $\frac{1}{4}$	2,262	1,010	2,240	1 u. 2 2 u. 3 2 u. 4 4 u. 5	1,374	17176	43550
2	0,000037	2 $\frac{1}{4}$	2,264	0,713	3,176		1,861	16787	31200
3	0,000075	1 $\frac{1}{10}$	2,265	0,383	5,910		1,891	17219	23660
4	0,000075	1 $\frac{1}{10}$	2,265	0,377	6,008		9,358	17470	19920
5	0,000202	1 0	5,347	0,095	56,223				
Im Mittel									17163 29580

Erst bei Dicken von 0,0002 cm ab wäre die Reflexion zu vernachlässigen, die anfänglich den Absorptionsvorgang so sehr übersteigt, daß der gesuchte Absorptionskoeffizient etwa 2,5 mal so groß erscheinen würde. Demgegenüber deutet die gute Konstanz der Werte α darauf hin, daß die Versuchsergebnisse mit genügender Sicherheit den tatsächlichen Verhältnissen entsprechen müssen.

Tabelle XIV.

d cm	J_0/J_m	J_0/J_m korrigiert	e^{ad}	k_μ
0,000037	3,176	3,113	1,887	0,434
0,000075	5,910	5,738	3,561	0,419
0,000075	6,008	5,833	3,561	0,430
0,000202	56,223	54,060	32,039	0,448
Im Mittel 0,433				

Die Reflexion überschreitet diejenige am Blattmetall nur sehr unbedeutend; einen Dickeneinfluß lassen die um 6,7 Proz. schwankenden Werte nicht erkennen.

Gold.

Sehr gute Konstanz der Beobachtungswerte ließ das Gold erwarten, dessen Dicke eine sehr gleichmäßige war, und das in den dünnen Schichten, welche allein der Messung zugänglich waren, nur in manchen Fällen vereinzelte kleine Löcher zeigte, deren Fläche nur etwa $\frac{1}{200}$ der Gesamtfläche ausmachte und deshalb kaum eine merkliche Korrektur erforderte. Von Interesse war die Untersuchung äußerst dünner, schön blaugrün durchscheinender Häutchen, deren Dicke nur 0,0000077 cm betrug, und die vollkommen lochfrei benutzt werden konnten. In den gegenwärtigen Versuchen habe ich mich allerdings mit der durch Kombination zweier Blättchen resultierenden Dicke begnügt. (Im übrigen vgl. 28 u. 32). Da Gold sehr leicht durch Quecksilberdämpfe verändert wird, erwies sich hier das Einbringen größerer Goldblättchen zur Absorption dieser Dämpfe und die Beschränkung des Versuches auf kurze Dauer als notwendig.

Tabelle XV.

Nr.	d cm	Bem.	J_0/J_m	Hieraus	J_m/J'_m korrigiert	α	Aus J_0/J_m α_0
1	0,0000154	2 0	2,782	} 1 u. 2 } 2 u. 3 } 3 u. 4 } 4 u. 5	1,621	26835	66370
2	0,0000334	1 0	4,650		2,476	27145	45960
3	0,0000668	2 0	12,287		2,485	27254	37510
4	0,0001007	1 0	32,384		2,478	27170	34490 33060
5	0,0001330	1 0	81,672				
Im Mittel						27101	43470

Es ist hierzu zu bemerken, daß die in Kolumne 6 bezeichneten Werte nicht direkt die Verhältnisse der J_m zweier benachbarter Dicken ausdrücken, sondern daß daran eine kleine Korrektur angebracht wurde, welche eine späterhin noch zu beschreibende (32) Versuchsanordnung nahelegte, aus der die Tatsache hervorging, daß die Reflexionskoeffizienten für benachbarte Dicken nicht genau dieselben Werte besitzen.

Tabelle XVI.

d cm	J_0/J_m	J_0/J_m korrigiert	$e^{\alpha d}$	k_{μ}
0,0000154	2,782	2,727	1,518	0,481
0,0000334	4,650	4,558	2,472	0,496
0,0000668	12,287	11,929	6,111	0,528
0,0001007	32,384	31,138	15,113	0,554
0,0001330	81,672	77,782	37,343	0,560

Im Verein mit späteren Beobachtungen (32) zeigt sich hier sehr auffällig eine Abhängigkeit der Reflexionskoeffizienten von der Dicke, die allerdings gegen Erwarten bis zu relativ großen Dicken fortschreitet, für die bei den anderen Metallen kein Anzeichen einer solchen Abhängigkeit gefunden war. Die Vermutung, daß die bei größeren Dicken beobachtete Zunahme von k_{μ} auf Oberflächenreflexionen der aufeinandergelegten Blättchen, wie etwa unter Nr. 3, zurückzuführen wäre, bestätigt sich nicht, da auch weiterhin eine Zunahme zu konstatieren ist, wo nur einzelne Blättchen vorliegen. Es scheint der Gedanke berechtigt, daß die beobachtete Beeinflussung der in die Oberfläche eingedrungenen Quanten wohl speziell den Molekülen des Goldes zuzuschreiben sei, so daß hier ein Einfluß der Dicke noch merkbar bleibt, wo dies für die anderen Metalle nicht mehr der Fall ist.

24. Auf Grund der vorliegenden Ergebnisse können wir zunächst das Folgende schließen:

Fallen Kathodenstrahlen vom Fenster einer Entladeröhre auf ein zur Erde geleitetes Metallblättchen, und werden die durchgehenden Quanten mit dem Paraffinkondensator gemessen, so kann der Absorptionskoeffizient nicht nach der einfachen Formel (13) berechnet werden. Man würde auf diese Weise zu Werten kommen, die für dünne Blättchen sehr hoch liegen und sich allmählich einer niedrigen, wohl als konstant anzunehmenden Größe nähern. Dagegen ist anzunehmen, daß beim Auftreffen der Strahlen auf die Oberfläche des Metalles ein gewisser Bruchteil der Anfangsstrahlenmenge durch einen der Reflexion ähnlichen Vorgang zurückgehalten wird und nicht in das Metall eintritt. Die Größe dieses Bruchteiles ist

experimentell bestimmt für Aluminium, Blattmetall, Silber und Gold. Sie erscheint bei den allerkleinsten Schichten von deren Dicke abhängig, am auffallendsten bei Gold, wo der Nachweis für Dicken gelang, die bei den anderen Metallen kaum mehr die Reflexion beeinflussen. Die gefundenen Absorptionskoeffizienten sind konstant innerhalb eines Dickenbereiches, in dem die Dicken um etwa das Zehn-, die durchgelassenen Intensitäten um das Hundertfache des kleinsten Wertes schwanken.

b) Der Käfigkondensator.

25. Wenn zwar die genügende Konstanz der im vorhergehenden beschriebenen Beobachtungen darauf hinweist, daß die der Rechnung zugrunde gelegten Annahmen in der Tat erfüllt zu sein scheinen, so lag doch der Gedanke nahe, die Versuche auch in einer Weise anzustellen, die Annahmen über mehrfache Reflexionen etc. entbehrlich macht. Dies trifft bei der Verwendung des Faradayschen Käfigs zur Messung der direkten und der von den Metallblättchen durchgelassenen Strahlenintensität zu und gibt uns im weiteren außerdem ein Mittel, Anhaltspunkte für die der theoretischen Erwägung schon zugrunde gelegte Erscheinung der sekundären Emission zu gewinnen. Trotz der Benutzung blanker Metallflächen zur Aufsammlung der negativen Ladungen, mußte die Methode vollkommen störungsfreie Resultate bieten, da der Käfig in der Versuchsröhre einem hinreichend guten Vakuum ausgesetzt werden konnte, daß Leitendwerden des Gasrestes als völlig beiseitigt gelten kann.

26. Der in Fig. 4 skizzierte Apparat besteht im wesentlichen aus einer blanken Metallbüchse aus Messing, deren oberer Deckel eine zentrale Öffnung von 7 mm besitzt. Die ganze Büchse ist isoliert im Innenraum einer ebensolchen, etwas weiteren Messingbüchse, die dauernd geerdet ist und elektrische Störungen von außen abschirmen soll. Über dem Deckel des Schutzkäfigs liegt, ebenfalls isoliert, eine dünne Messingscheibe m mit 1,2 cm weiter Öffnung zentrisch zur Achse des Apparats; sie wird durch einen zwischen den beiden Büchsen im Inneren eines dünnen geerdeten Metallröhrchens isoliert laufenden Draht mit dem Meßinstrument verbunden. Über den Vorderteil dieses ganzen Apparates wird bis zu einem festen

Anschlag d ein Metalldeckel D geschoben, der, ebenfalls geerdet, die isolierten Teile des Instrumentes zusammen mit der schon beschriebenen Hülle vollständig einschließt. Zum Durchtritt der Kathodenstrahlen und zur Aufnahme der Metallblättchen besitzt dieser Deckel eine zentrale 4 mm weite Öffnung o , über die, durch kleine Nieten markiert, eine dünne Messingscheibe mit gleichgroßer Öffnung zum Festhalten der Blättchen aufgelegt ist. Zwei $\frac{1}{2}$ mm breite, seitliche Schlitzze, am Deckel gestatten den schiefer laufenden Strahlen Zutritt zur bezeichneten Messingscheibe m , die auf diese Weise als Kontrollkondensator verwendet wird, indem dann jeder im zentralen Teil des Apparates gemessenen Strahlenintensität eine entsprechende Intensität an der Kontrollscheibe sich zuordnet, in der Weise, daß der Quotient beider unabhängig wird von der Anfangsintensität. Es ist auch hier Sorge getragen, daß der Boden des Deckels möglichst dünn und die Wände der zentralen Öffnung scharf sind, damit keine Strahlen dort verloren gehen. Der Zwischenraum zwischen der Öffnung des Käfigkondensators und der oberen Öffnung des Deckels betrug nur 1 mm, damit auch die sehr diffus von dieser Öffnung oder dem es bedeckenden Blättchen ausgehenden Strahlen noch ungehindert in die Käfigöffnung gelangen können. Ein am Deckel befestigtes Röhrchen, das mit seiner Unterfläche den geerdeten Metallboden berührte, wenn der Deckel eingeschoben war, verhinderte die Beeinflussung der Kontrollplatte oder des Käfigkondensators durch Strahlen, die von der ihnen nicht zugeordneten Öffnung diffus ankommen könnten. Die ganze Vorrichtung ist an dieselbe Stelle in die Versuchsröhre eingesetzt worden, wo sich zuvor der Paraffinkondensator befand, und ihre Lage war mit Hilfe des Glasschliffes immer exakt einzuhalten.

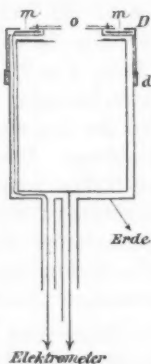


Fig. 4.

27. Tritt ein Kathodenstrahlenbündel von der Anfangsintensität i_0 durch die obere Öffnung des Deckels in den Käfig ein, so wird fast die Gesamtmenge dort absorbiert und mit dem Elektrometer gemessen werden. Nur ein kleiner Bruch-

teil wird wieder zur Austrittsöffnung gelangen und deshalb verloren gehen. Derselbe stellt sich dar durch den Ausdruck

$$i_0 \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + \varrho^2}} \right),$$

wenn l die Länge und ϱ der Öffnungsradius des Käfigs ist. Für den beschriebenen Käfig beträgt dieser Verlust genau 1 Proz. ($l = 2,5$ cm, $\varrho = 0,35$ cm) und soll bei allen folgenden Betrachtungen schon als berücksichtigt gelten. Dann mißt also der Ausschlag des Elektrometers die ganze ankommende Strahlung. Das Entstehen sekundärer Strahlung im Inneren des Käfigs kommt nicht in Frage, da die von einem Punkt ausgehenden Strahlen nach einem anderen Punkt desselben Apparatteiles zielen und deshalb der einen Stelle genau dieselbe Elektrizitätsmenge zuführen würden, die sie einer anderen entziehen. Zunächst ist demnach zu schreiben: $J_0^k = i_0$.

Wird jetzt die obere Öffnung des Apparates mit einem Metallblättchen bedeckt, so ist nach den früheren Erwägungen (14) an dessen Rückseite die Intensität

$$J = i_0 (1 - k) \cdot e^{-\alpha d} \cdot \{1 + \sigma\}$$

zu erwarten. Diese gesamte Intensität wird aber mit dem Käfigkondensator gemessen, wenn wieder die Korrektur wegen eines kleinen Verlustes durch die Eintrittsöffnung angebracht ist. Wir gewinnen sonach für unsere Messungen die Beziehung

$$\frac{J_0^k}{J_m^k} = \frac{e^{\alpha d}}{(1 - k_\mu) \{1 + \sigma_\mu\}}.$$

Da α bekannt und auch hier nach der Methode aufeinanderfolgender Dicken ohne Kenntnis von k_μ und σ_μ zu finden ist, würde sich aus der abgeleiteten Beziehung, falls auch hier die Tatsachen den Voraussetzungen entsprächen, die Größe σ_μ ergeben, die anzeigt, welcher Betrag von sekundärer Strahlung an der Rückseite des Metalles zur Emission kommt, ausgedrückt in Prozenten der sie erzeugenden Primärstrahlung. Der Wert von k_μ wäre den schon mitgeteilten Resultaten zu entnehmen.

28. Die Messungen sind in derselben Weise in Angriff genommen worden, wie schon beim Paraffinkondensator beschrieben. Insbesondere geben die Werte J_0^k und J_m^k wieder die Mittel sehr nahe miteinander übereinstimmender Quotienten des für den Hauptkondensator und den Kontrollkondensator erhaltenen Elektrometerausschlages. Die besprochene Korrektur ist an den mitzuteilenden Werten schon angebracht. Für σ_μ gilt dann

$$\sigma_\mu = \frac{e^{\alpha d}}{\frac{J_0^k}{J_m^k} \cdot (1 - k_\mu)} - 1.$$

In der letzten Kolumne sind die aus benachbarten Dicken berechneten Werte von α verzeichnet.

Aluminium.

Es wurden, wo dies möglich war, genau dieselben Blättchen benutzt wie früher, so daß der Vergleich keinerlei Schwierigkeiten bereitet. Für α ist 4426 und für $k_\alpha = 0,172$ zugrunde gelegt (23).

Tabelle XVII.

Nr.	d cm	J_0^k/J_m^k	$e^{\alpha d}$	σ_α	Aus	$J_m^k/J_m^{k'}$	α
1	0,000284	3,774	3,514	0,124	1 u. 3	1,823	4435
2	0,000293	3,840	3,656	0,150	1 u. 4	3,609	4421
3	0,0004195	6,880	6,398	0,123	2 u. 4	3,547	4450
4	0,000574	13,623	12,846	0,138	4 u. 5	3,675	4392
5	0,000870	50,064	46,980	0,133			
Im Mittel 0,134							4424

Der auf ganz andere Weise erhaltene Wert des Absorptionskoeffizienten stimmt mit dem früher gefundenen sehr gut überein. Außerdem findet sich, daß der primäre Strahl beim Austritt aus der Hinterfläche des Aluminiums daselbst eine sekundäre Strahlung veranlaßt, deren Größe etwa 13 Proz. von der Intensität des Primärstrahles beträgt. Es ist zu vermuten, daß sie in Wirklichkeit noch etwas größer sein wird,

Nr.	d cm	J_0^k/J_m^k	$e^{\alpha d}$	σ_μ	Aus	$J_m^k/J_m^{k'}$	α
1	0,0000077	1,939	—	—	$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ u. } 2 \\ 2 \text{ u. } 3 \\ 3 \text{ u. } 4 \end{array} \right\}$	1,262	30220
2	0,0000154	2,523	1,518	0,159		1,631	27200
3	0,0000334	4,245	2,472	0,156		2,467	27038
4	0,0000668	11,325	6,111	0,143			
			Im Mittel	0,153	27111		

Die Werte der siebenten Kolumne haben eine Korrektur erfahren, welche die ungleiche Reflexion an den Blättchen berücksichtigt. Das Mittel aus den beiden letzten Werten der α entspricht dann gut dem früheren Wert. Die für das verdünnte Goldhütchen erhaltene Zahl von 30220 wurde nicht berücksichtigt, da ihre Größe darauf hinweist, daß sich dabei die Kathodenstrahlen wohl noch nicht als vollkommen homogen erweisen, indem hier noch merklich diejenigen kleinen Geschwindigkeiten durchzutreten scheinen, die früher in kleiner Menge nachgewiesen waren. Daß aber der Unterschied des Wertes von α nur sehr unbedeutend ist, deutet wieder darauf hin, daß die in Betracht kommende Strahlenmenge eine sehr geringe ist. Wenn die auf diese Weise angenommene schwächere Absorption der Strahlen durch das dünnste Blättchen sich in einem *größeren* Absorptionskoeffizienten bemerkbar macht, so ist dies erklärlich, wenn nur geschlossen wird, daß sich die größere Durchlässigkeit ausschließlich auf das dünnste Blättchen beschränkt; dann ist J_m^k zu groß und infolgedessen α . Bemerkenswert ist das für das dünnste Blättchen erhaltene Resultat noch nicht insofern, als es zeigt, daß die sekundäre Strahlung gegenüber der durch Absorption verloren gegangenen Primärstrahlung derart hervortreten kann, daß dadurch das Vorhandensein einer Absorption nicht zu bestehen scheint. Beobachtet wurde für das dünnste Goldblättchen eine durchtretende Intensität von 1,620 bei einer Anfangsintensität von 3,142. Nehmen wir als Reflexionskoeffizienten den beinahe zutreffenden Wert von 0,48 an, so würde nur eine Strahlenmenge von 1,634 ins Blättchen eintreten können. Da aber beim Austritt noch 1,620 zur Beobachtung kommen, wäre so gut wie nichts absorbiert. In diesem Fall wird die durch Absorption verschwindende Quantenmenge gerade aufgewogen durch die infolge der Sekundärstrahlung neu hinzukommende.

29. Wir gewinnen nach diesen Beobachtungen die Erkenntnis, daß auch die schnellen in der Arbeit benutzten Kathodenstrahlen beim Durchqueren fester Medien eine sekundäre Strahlung auslösen, die nicht mit dem Paraffinkondensator wahrnehmbar war, also eine geringe Geschwindigkeit besitzen muß, deren Bestimmung noch die Aufgabe wäre. Die Größe

der sekundär emittierten Quantenmenge scheint in gewisser Weise abzuhängen von der Natur der Substanz, derart, daß Silber sich am wirksamsten, Aluminium am wenigsten wirksam erweist.

30. Während die bis jetzt erhaltenen Daten uns nur einen Einblick geben in die Verhältnisse an der Hinterfläche der Metallblättchen, mußte noch das Studium der Erscheinungen an der von Kathodenstrahlen getroffenen Vorderseite von Interesse sein. Einen Anhaltspunkt hierfür gewinnt man aus den Überlegungen des Abschnittes (14), wo gezeigt ist, daß sich die an der Metalloberfläche emittierte Strahlenmenge wohl zusammensetzen muß aus einem primären und einem sekundären Teil. Den ersteren aber haben die Beobachtungen mit dem Paraffinkondensator ergeben, so daß nur noch die Frage nach dem zweiten Teil bestehen bleibt. Fällt nun ein Primärstrahl auf die Oberfläche eines mit dem Elektrometer verbundenen und vorher mit diesem geerdeten Metalles, so wird die von dem Metall aufgenommene negative Ladung $J = i_0 (1 - (k + \lambda))$ sein.¹⁾ Ist außerdem die Anfangsintensität bekannt, so findet sich hieraus $(k + \lambda)$, woraus nach Einsetzen des früher gefundenen k sich der Koeffizient für die Sekundärstrahlung ohne weiteres ergibt. Von Interesse mußte für die vorliegende Arbeit besonders die Reflexionserscheinung an den für die Absorptionsversuche benutzten, noch gut durchlässigen Metallblättchen sein. Daß solche Versuche im Berliner physikalischen Institut in Angriff genommen wären, gibt Hr. Warburg²⁾ an. Da mir leider hierüber noch keine Resultate bekannt geworden sind, und die Kenntnis der Erscheinungen für meine Beobachtungen notwendig erschien, habe ich selbst Beobachtungen in folgender Weise angestellt.

31. Der benutzte Apparat ist der schon beschriebene Käfigkondensator, dessen oberer Deckel rund um die 7 mm weite Auffangeöffnung eine schmale Rinne besaß, in welche mit der Öffnung genau gleichweite Metallringe eingepreßt werden

1) Störungen, wie sie Hr. Starke (Wied. Ann. 66. p. 49. 1898) beim Isolieren seiner Metalle findet, traten hier nicht auf; es erklärt sich dies aus der Reinheit der Versuchsbedingungen.

2) E. Warburg, Verh. Phys. Ges. 4. p. 22. 1904.

konnten. Die beiden Ringe ließen in ihrer Mitte eine 6 cm weite Öffnung, die derart mit dem zu untersuchenden Metallblättchen bedeckt werden konnte, daß seine Ebene genau in die Ebene der Käfigöffnung zu liegen kam. Metalle größerer Dicke waren in die Rinne der Öffnung passend genau abgedreht und ihre Oberfläche glatt poliert. War nun der Käfig offen, so wurde i_0 gemessen — der Kontrollkondensator wurde wie früher benutzt —; war die Öffnung in der geschilderten Weise bedeckt, so war der Elektrometerausgang bei Verbindung mit dem Käfig ein Maß für die vom Blättchen nicht emittierte Strahlenmenge. Dabei spielte die Absorption im Metall keine Rolle, da die absorbierte Quantenzahl ebenso gut wie die hinten noch durchgelassene von dem Käfig aufgenommen und dem Elektrometer zugeführt wurde. Die Messungsergebnisse ergeben demnach exakt die Menge

$$J = i_0 (1 - (k + \lambda)),$$

gleichgültig ob das Metall vollkommen absorbiert oder noch teilweise durchlässig ist. Die Sekundärstrahlung von der Rückseite spielt keine Rolle dabei. Aus den beiden Intensitäten J und i_0 aber ist λ zu berechnen nach der Formel

$$\lambda = 1 - k - J/i_0.$$

32. In der folgenden Tabelle sollen zunächst die so gefundenen Werte von $(k + \lambda)$ zusammengestellt werden. Es ist noch zu bemerken, daß für den seltenen Fall nicht vollkommen lochfreier Blättchen die entsprechende Korrektur angebracht ist. Da der Abstand der Einlaßöffnung o von der Metalloberfläche nur 1 mm beträgt, tritt der größte Teil der reflektierten Quanten durch diese Öffnung nach außen und beeinträchtigt den Ausschlag nicht weiter. Die andere, die Hinterfläche des oberen Deckels treffende Strahlung ist fast unschädlich gemacht durch Belegen dieser Fläche mit dünnem Blattaluminium, das nur einen geringen Bruchteil reflektiert. Der trotzdem noch gegen das Metallblättchen hingeworfene Rest, welcher den Ausschlag zu groß, d. h. die Reflexion zu klein erscheinen ließe, ist mit $1\frac{1}{2}$ —2 Proz. als Korrektur aus den Dimensionen des in Betracht kommenden Raumes bestimmt und in Rechnung gesetzt worden.

Tabelle XX.

Metall	Dicke	i_0	J	$k_\mu + i_\mu$	Mittel
	cm				
1. Aluminium	0,0001828	2,995	2,113	0,302	0,304
"	0,000284	2,995	2,091	0,309	
"	0,0430	3,057	2,155	0,302	
2. Blattmetall	0,000091	3,026	1,394	0,544	0,548
"	0,00028	3,026	1,346	0,560	
"	0,0430	3,025	1,404	0,541	
3. Silber	0,000018	3,026	1,170	0,618	0,618
"	0,00042	3,026	1,115	0,635	0,636
"	0,043	3,026	1,111	0,637	
4. Gold	0,0000077	3,020	1,229	0,598	0,598
"	0,0000334	3,026	1,130	0,627	0,627
"	0,0000668	3,020	1,025	0,665	0,665
"	0,000170	3,026	0,901	0,705	0,705
"	0,044	3,026	0,900	0,706	

Es ergibt sich das beachtenswerte Resultat, daß bei allen Metallen eine starke Verminderung der Anfangsstrahlung i_0 auftritt, wenn die Käfigöffnung bedeckt wird, und daß diese Verminderung auf eine Emission an der getroffenen Vorderfläche zu rechnen ist, die mit einer Reflexion vergleichbar erscheint. Diese Reflexion ist mit wachsender Dichte der untersuchten Metalle größer, aber durchaus nicht proportional. Im allgemeinen zeigt sich ferner, daß die Reflexion in den meisten Fällen von der Dicke der reflektierenden Schicht unabhängig ist, d. h. daß die Erscheinung lediglich auf die Oberfläche beschränkt zu sein scheint. Nur bei sehr geringen Dicken und den schwersten Metallen scheint ein merkbares Zurückwerfen der Quanten aus dem Innern zu bestehen, indem wir beim Silber vielleicht eine kleine Abnahme der Zurückwerfung bei der kleinsten Dicke wahrnehmen, während das dichte Gold ganz erhebliche Unterschiede aufweist. Man erkennt, daß das dünnste Gold sogar noch weniger reflektiert als das Silber, daß aber mit der Dicke eine starke Zunahme erfolgt, die bei 0,0001 cm erst still zu stehen scheint. Um nun die Gesamtwirkung von primärer Reflexion und sekundärer Emission auseinander zu halten, sind die erhaltenen Daten mit den Werten von k_μ zu vergleichen, die sich früher ergaben.

Tabelle XXI.

k_μ primäre Reflexion, λ_μ sek. Emission an der Vorderfläche, σ_μ an der Hinterfläche.

Metall	$k_\mu + \lambda_\mu$	k_μ	λ_μ	σ_μ
Aluminium	0,304	0,172	0,132	0,134
Kupfer	0,548	0,407	0,141	—
Silber	0,818	—	—	—
„	0,636	0,433	0,203	0,186
Gold	0,598	—	—	—
„	0,627	0,496	0,131	0,153
„	0,665	0,528	0,137	—
„	0,705	0,560	0,145	—

Der Vergleich zeigt, daß die in früheren Fällen von anderen Beobachtern und auch die im gegenwärtigen Falle als reflektiert betrachtete Quantenmenge nur teilweise eine Zurückwerfung primärer Strahlung bedeutet, daß ein ziemlich großer Teil auf sekundäre Emission zu rechnen ist. Vergleicht man die für diese Emission an der Vorder- und Hinterfläche des Blättchens gefundenen Konstanten, so stimmen diese nahezu überein; dieses von vornherein wahrscheinliche Resultat läßt sich so aussprechen: Das Hindurchfahren primärer Kathodenstrahlen durch die Atome der Materie — die an Metallen speziell gewonnene Erfahrung kann wohl ohne weiteres verallgemeinert werden — hat den Austritt negativer Quanten nach allen Richtungen in annähernd gleicher Zahl zur Folge. Von der Substanz ist die emittierte Quantenmenge in geringem Maße abhängig; sie scheint für Aluminium, Blattmetall und Gold annähernd dieselbe zu sein, Silber dagegen erscheint wirksamer. Betrachtet man die Veränderlichkeit der $k_\mu + \lambda_\mu$ mit der Dicke, besonders bei Gold, so zeigt sich, daß diese Abhängigkeit sich lediglich auf die Reflexion der primären Strahlen bezieht, und daß die durch Subtraktion der beiden auf so ganz verschiedene Art gewonnenen Reflexionsgrößen ($k_\mu + \lambda_\mu$) und k_μ erhaltene Sekundäremission nahezu von der Dicke unabhängig erscheint. Auch dieses Resultat ist zu erwarten gewesen, wenn man für die sekundären Strahlen nur eine langsame Geschwindigkeit voraussetzt, die ihre sofortige Absorption schon in den allerdünnsten Schichten verursachen

würde, so daß also nur die in den äußeren Schichten erzeugten Quanten zur Emission kommen.

c) Der blanke Metallkondensator.

33. Die gute Übereinstimmung der bis jetzt mitgeteilten Versuchsergebnisse untereinander und mit den Forderungen der theoretischen Erwägungen, die an den Anfang gestellt worden sind, berechtigt zur Überzeugung, daß unsere Erwägungen den Tatsachen vollkommen entsprechen. Trotzdem wurde noch eine weitere Methode in den Bereich der Untersuchungen gezogen, welche in gewisser Weise die Summe aller vorher erzielten Resultate in sich vereinigt und dadurch eine Kontrolle aller vorher bestimmten Daten abgeben mußte. Zugleich wurde diese Methode auf einen möglichst umfassenden Dickenbereich ausgedehnt und besondere Sorgfalt auf eine nochmalige exakte Bestimmung der Absorptionskoeffizienten und ihre eventuelle Abhängigkeit von der Metalldicke verwandt.

34. Als Meßapparat benutzte ich jetzt den früher beschriebenen Paraffinkondensator, von dem die Paraffinschicht und die obere Aluminiumbelegung entfernt war, so daß die blanke Metallelektrode den einfallenden Primärstrahlen ausgesetzt war. Der den Apparat schützende Metalldeckel war mit seiner zentralen Öffnung bis auf 0,02 cm auf die Elektroden hingeschoben, damit der Zwischenraum zwischen Blättchen und Elektrode ein möglichst kleiner wurde. Die Quotienten aus Kontrollscheiben- und Hauptplattenladung waren wieder gut konstant für beliebige Schwankungen der Anfangsintensität.

35. Für eine richtige Deutung der mit dem Apparat zu erzielenden Messungen ist folgendes zu bemerken:

Bei offener Eintrittsöffnung am oberen Metalldeckel wird die durch die Hauptplatte abgeleitete negative Ladung ganz analog dem zuletzt für die Reflexionsbeobachtungen behandelten Fall sein

$$J_0 = i_0 [1 - (k_\alpha + \lambda_\alpha)],$$

worin sich der Index α auf Aluminium als Elektrode bezieht. Reflexionen am Deckel kommen hierbei wegen seiner großen Nähe so wenig in Betracht, daß die notwendige Korrektur von ca. $\frac{1}{2}$ Proz. meist zu vernachlässigen war. Ist die Öffnung

mit einem Metallblättchen von der Dicke d bedeckt, so wird an dessen Hinterfläche zunächst zum Austritt kommen:

$$i_0 (1 - k_\mu) e^{-\alpha d} + \sigma_\mu i_0 (1 - k_\mu) e^{-\alpha d};$$

diese Ladung gelangt auf die Elektrode und würde dort total zur Messung gelangen, wenn nicht ein gewisser Bruchteil

$$k_\alpha i_0 (1 - k_\mu) e^{-\alpha d} + \lambda_\alpha i_0 (1 - k_\mu) e^{-\alpha d}$$

davon zu subtrahieren wäre, der herrührt einmal von der Reflexion primärer Strahlen, das andere Mal von sekundärer Emission. Daß die langsamen Sekundärstrahlen ebenfalls reflektiert würden, ist nicht anzunehmen. Der reflektierte obige Teil gelangt zum Metallblättchen zurück und wird dort, soweit es Primärstrahlen sind, wieder zum Teil reflektiert und zugleich mit neu erzeugter Sekundärstrahlung zur Hauptelektrode gelangen. Da indes nur noch ein gewisser Prozentsatz dieser Quanten infolge der starken Diffusion meßbar werden wird und da außerdem noch weitere Reflexionen eventuell anzunehmen wären, bleiben wir bei dem letzterwähnten Ausdruck stehen und multiplizieren ihn mit einer Konstanten, die ähnlich wie beim Paraffinkondensator durch Überrechnen des noch zu erwartenden zu $\frac{2}{3}$ angenommen wurde. Da eine gewisse Ungenauigkeit dieses Wertes keine erheblichen Abweichungen hervorruft, genügt ein angenäherter Wert vollkommen. Die bei eingefügten Blättchen zu erwartende Quantenmenge wäre demnach

$$J_m = i_0 (1 - k_\mu) e^{-\alpha d} \{1 + \sigma_\mu - (k_\alpha + \lambda_\alpha) + \gamma k_\alpha (k_\mu + \lambda_\mu)\},$$

und daraus ergibt sich nach Elimination von i_0

$$\frac{J_0}{J_m} = \frac{[1 - (k_\alpha + \lambda_\alpha)] e^{\alpha d}}{[1 + \sigma_\mu - (k_\alpha + \lambda_\alpha) + \gamma k_\alpha (k_\mu + \lambda_\mu)] \cdot (1 - k_\mu)}.$$

Werden dagegen die Werte von J_m für zwei benachbarte Dicken betrachtet, so findet sich

$$\alpha = \frac{1}{d' - d} \cdot \log \frac{J_m'}{J_m},$$

wo eventuell noch k_μ dann zu berücksichtigen ist, wenn seine Abhängigkeit von der Dicke konstatiert war.

Nach der Ermittlung der α -Werte habe ich die obige komplizierte Formel, die in der Tat alle die früher bestimmten

Konstanten enthält, in der Weise kontrolliert, daß nach Einsetzen des beobachteten J_0/J_m und der bekannten Werte von $(k + \lambda)$ und k die Größe σ_μ als Unbekannte ausgerechnet und mit den früheren Werten verglichen wurde. Dadurch ist dann die Richtigkeit sämtlicher Größen kontrolliert.

Es ist noch zu erwähnen, daß, um die Reflexionsvorgänge durch das Experiment richtig wiederzugeben, die untere Fläche des die Blättchen aufnehmenden Metalldeckels jeweils mit einem Blättchen vom gleichen Metall wie das untersuchte bedeckt wurde, damit die vorausgesetzte gleichartige Reflexion tatsächlich besteht.

36. Zu allen *Messungen*, die in der schon bekannten, überall gleichartigen Weise ausgeführt wurden, sind, soweit möglich war, dieselben Blättchen benutzt worden, wie früher. In jedem anderen Fall aber verbürgt die große Zahl der Variationen jede Genauigkeit der Dickenmessung wie der Absorptionsbestimmung. Die früher angedeutete Korrektur auf Lochfreiheit war auch hier in manchen Fällen nach denselben Überlegungen angebracht.

Aluminium.

Die benutzten Blättchen waren bis auf die zwei dünnsten lochfrei.

Tabelle XXII.

Nr.	d cm	Bem.	J_0	J_m	J_0/J_m	Aus	J_m/J_m'	α
1	0,0000664	1 $\frac{1}{10}$	2,264	1,7635	1,2838	1 u. 2	1,374	4785
2	0,0001328	2 „	2,119	1,201	1,764	3 u. 5	3,550	4573
3	0,000284	1 0	2,895	0,8583	3,373	4 u. 5	3,289	4442
4	0,000293	1 0	15,773	4,382	3,641	4 u. 6	3,468	4378
5	0,000561	1 0	2,264	0,189	11,977	3 u. 6	3,744	4505
6	0,000574	1 0	14,778	1,170	12,631	6 u. 7	3,679	4445
7	0,000870	1 0	10,144	0,2182	46,474	6 u. 8	3,603	4374
8	0,000870	1 0	15,340	0,337	45,520	5 u. 8	3,800	4320
9	0,001122	2 0	11,569	0,0798	144,978	8 u. 9	3,184	4596
10	0,001154	4 0	10,651	0,063	169,067	7 u. 9	3,119	4513
11	0,001428	3 0	15,776	0,0244	646,568	10 u. 12	3,793	4694
12	0,001436	1 0	15,776	0,0246	641,311	10 u. 11	3,824	4895
	—	—	—	—	—	9 u. 11	4,459	4885

Die Tabelle zeigt, daß die Absorptionskoeffizienten innerhalb des Dickenbereiches von 0,00013 bis 0,0011 cm konstant sind; das Mittel beträgt 4461. Erst bei noch größeren Dicken nimmt α etwas zu und würde dadurch eine kleine Abnahme an Geschwindigkeit der Strahlen anzeigen. Der für das dünnste Blättchen konstatierte größere Wert weist, wie schon einmal hervorgehoben, hin auf eine geringe Inhomogenität der benutzten Strahlen. Aus den mitgeteilten Elektrometerablesungen wird σ_a erhalten, wenn $k_a = 0,172$ und $k_a + \lambda_a = 0,304$ gesetzt wird.

Tabelle XXIII.

 $\alpha = 4461.$ $\gamma = \frac{2}{3}.$

d cm	J_0/J_m	$e^{\alpha d}$	σ_a
0,000284	3,373	3,550	0,153
0,000293	3,641	3,695	0,122
0,000561	11,977	12,213	0,126
0,000574	12,631	13,119	0,142
0,000870	46,474	48,475	0,164
0,000870	45,520	„	0,145
0,001122	144,978	149,165	0,133

Im Mittel 0,141

Blattmetall.

Tabelle XXIV.

Nr.	d cm	Bem.	J_0	J_m	J_0/J_m	Aus	J_m/J_m'	α
1	0,0000326	2 $\frac{1}{3}$	2,548	1,375	1,853	1 u. 2	1,203	11790
2	0,0000483	1 0	2,548	1,143	2,229	2 u. 3	1,774	11868
3	0,0000964	1 0	2,569	0,650	3,953	2 u. 4	13,130	11993
4	0,000263	1 0	18,378	0,628	29,264	3 u. 4	7,331	11972
5	0,000263	1 0	18,378	0,634	28,985	5 u. 6	24,473	12158
6	0,000520	1 0	18,524	0,0261	709,742	4 u. 6	24,241	12122

Im Mittel 11984

Da σ_a früher nicht bestimmt worden ist, gibt die folgende Messung die unkontrollierten Werte dafür zum erstenmal an. Daß dieselben aber einwandfrei sind, dürfte die Übereinstimmung der σ -Werte für Aluminium dartun, wonach zu er-

warten ist, daß auch für Blattmetall keine Diskrepanz auftreten werde. Ein Zweifel daran erscheint um so unberechtigter, als das gefundene σ_μ auch nahezu mit dem für Blattmetall bestimmten λ_μ zusammenfällt.

Tabelle XXV.

 $\alpha = 11936.$ $\gamma = \frac{2}{3}.$

d cm	J_0/J_m	$e^{\alpha d}$	σ_μ
0,0000483	2,229	1,779	0,165
0,0000964	3,953	3,167	0,169
0,000263	29,264	23,084	0,154
0,000263	28,985	"	0,163
0,000520	709,742	532,860	0,111

Mittel 0,152

Der für die größte Dicke erhaltene Wert von σ_μ stimmt wenig mit den anderen überein; dies scheint, wie schon die α vermuten lassen, darauf hinzudeuten, daß die Strahlen hier schon eine geringe Einbuße an Geschwindigkeit erlitten haben.

Silber.

Da die benutzten dünnen Silberblättchen ausnahmslos zahlreiche Löcher besaßen, lassen die gefundenen α -Werte bezüglich der Konstanz zu wünschen übrig.

Tabelle XXVI.

Nr.	d cm	Bem.	J_0/J_m	Aus	J_m/J_m'	α
1	0,000037	2 $\frac{1}{5}$	2,328	1 u. 2	1,820	16185
2	0,000075	1 $\frac{1}{5}$	4,238	2 u. 4	9,371	17481
3	0,000111	1 $\frac{1}{5}$	7,981	2 u. 3	1,883	17104
4	0,000202	1 0	39,720	3 u. 4	4,977	17635
5	0,000405	1 0	1743,710	4 u. 5	43,900	18630

Mittel 17101

Hier findet sich ziemlich ausgesprochen wieder die Abhängigkeit von der Dicke; besonders deutlich ist die Zunahme von α bei dem dicksten Blättchen bemerkbar. Dieser Wert

ist deshalb bei der Berechnung des Mittels ausgeschlossen worden.

Tabelle XXVII.

$$\alpha = 17101.$$

$$\gamma = \frac{2}{3}.$$

d cm	J_0/J_m	$e^{\alpha d}$	σ_μ
0,000037	2,328	1,886	0,211
0,000075	4,238	3,561	0,248
0,000111	7,981	6,720	0,250
0,000202	39,720	32,039	0,207

Mittel 0,229

Auffallend ist der verhältnismäßig große Wert von σ_μ , der aber in Übereinstimmung steht mit den früheren Ergebnissen.

Gold.

Von diesem Metall war eine größere Auswahl an verschiedenen Dicken vorhanden. Es sind deshalb wieder zahlreiche Beobachtungen angestellt worden.

Tabelle XXVIII.

Nr.	d cm	Bem.	J_0/J_m	Aus	J_m/J_m'	α
1	0,0000077	1 0	1,633	1 u. 2	1,256	29605
2	0,0000154	2 0	2,111	2 u. 3	1,628	27081
3	0,0000334	1 0	3,545	3 u. 5	2,496	27390
4	"	—	3,397	4 u. 6	2,593	28527
5	0,0000668	2 0	9,548	3 u. 6	2,484	27241
6	"	—	9,515	5 u. 7	2,520	27679
7	0,0001007	1 0	25,508	6 u. 8	2,391	26100
8	"	1 0	24,104	8 u. 9	2,426	26656
9	0,0001330	1 0	59,736	7 u. 10	2,443	26921
10	"	1 0	61,487			

Im Mittel 27199

Eine Änderung von α mit der Dicke ist innerhalb des untersuchten Bereichs nicht zu konstatieren. Die Inhomogenität der Strahlen ist durch den großen Wert für das kleinste Blättchen ausgedrückt.

Tabelle XXIX.

 $\alpha = 27199.$ $\gamma = \frac{2}{3}.$

d cm	J_0/J_m	$e^{\alpha d}$	σ_μ
0,0000154	2,111	1,519	0,184
0,0000334	3,545	2,476	0,182
"	3,397	2,476	0,224
0,0000668	9,548	6,132	0,160
"	9,515	"	0,163
0,0001007	25,503	15,187	0,138
"	24,104	"	0,192
0,0001330	61,487	37,610	0,174

Im Mittel 0,177

Die einzelnen σ_μ schwanken zwar ziemlich beträchtlich; doch ist das Mittel mit früherem wohl vereinbar.

d) Der elektrisch geladene Metallkondensator.

37. Die nach den beschriebenen Methoden erhaltenen Resultate, insbesondere die für primäre und sekundäre Strahlen einzeln gemachten Aussagen basieren alle auf den beiden an den Anfang der Untersuchungen gestellten Merkmalen, daß

1. die Energie der sekundären Strahlung nicht von den Primärstrahlen stammt, sondern aus dem Innern des durchfahrenen Atoms, und daß

2. die Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen eine so geringe ist, daß dieselben den Paraffinkondensator nicht durchdringen.

Während die erste Unterscheidung auf reiner Definition beruht, ist die zweite vorangestellt worden auf Grund der Untersuchungen von Hrn. Lénard, aus denen hervorgeht, daß die Geschwindigkeit sich etwa innerhalb der Grenzen 0 und 12 Volt zu bewegen scheint. Sind nun die gegenwärtigen Beobachtungsergebnisse, besonders die Erscheinungen am Paraffinkondensator richtig gedeutet, so muß sich auch für die hier benutzten schnellen Primärstrahlen jener niedrige Wert der Sekundärgeschwindigkeit ergeben und außerdem dürfen Primärstrahlen von so geringer Geschwindigkeit, daß sie ebenfalls vom Paraffinkondensator in merklicher Menge zurückgehalten

würden, nicht vorkommen. Daß dies letztere in der Tat der Fall ist, kann aus der nahezu vollkommenen Übereinstimmung der mit Paraffin- und mit Metall- oder Käfigkondensator erhaltenen Absorptionskoeffizienten untereinander geschlossen werden. Besonders aber müßten die Werte von σ , die durch elektrische Beeinflussung der Strahlen sich erhalten lassen, wesentlich verschieden sein von den beispielsweise mit dem Faradayschen Käfig gewonnenen Werten, wo die Größe σ_μ unabhängig von einer Festsetzung der Geschwindigkeit nur gewonnen ist auf Grund der obigen Forderung 1.

38. Ich habe zur Klärung dieser Verhältnisse mit Benutzung des *blanken Metallkondensators* die folgenden Versuche ausgeführt.

Während die Fensteröffnung am Kopfe des Instrumentes unbedeckt war, wurde die zentrale Elektrode zusammen mit dem Elektrometer auf eine kleine Spannung negativ geladen und nach einigen Entladungen der Kathodenröhre die zurückbehaltene Quantenmenge gemessen; die Kontrollelektrode stand mit einem zweiten, geerdeten Elektrometer in Verbindung, und war in allen Fällen ungeladen. Elektrische Beeinflussung derselben durch die von der Hauptplatte ausgehenden Kraftlinien war durch ihre völlige Abtrennung durch abgeleitete Metallwände ausgeschlossen. Das erhaltene Resultat ist folgendes:

Elektrode Volt:	0	— 8	— 16	— 24	— 32
J_0 :	2,254	2,247	2,207	2,198	2,205

Man erkennt, daß negative Ladung auf die angesammelte Quantenmenge, d. h. auch auf die Reflexion keinen wesentlichen Einfluß hat. Es entweicht also auch bei vorher geerdeter Platte alle sekundäre Strahlung. Dies erklärt sich entweder daraus, daß ja durch die Bestrahlung immer eine kleine, die Ausstrahlung beschleunigende negative Ladung vorhanden ist, oder daß verzögernde Kräfte an der Oberfläche der Platte nicht merklich in Betracht kommen.

Ein positives Laden der Elektrode bei geöffnetem Fenster ist nicht angängig, da dabei infolge der starken Inhomogenität des Feldes nicht nur alle langsame Strahlung an der Platte festgehalten, sondern auch von anderweitig bestrahlten Flächen

herangezogen werden würde. Ein homogenes Feld besteht aber nach Bedecken des Fensters mit einem Metallblättchen. Dann gelten die früher entwickelten Formeln mit der Modifikation, daß bei negativ geladener Platte zwar die an ihr erzeugte sekundäre Strahlung ebenso entweicht wie ohne Ladung, daß aber die von der Hinterfläche des Blättchens emittierte sekundäre Strahlung nicht ankommt, wenn nur die angelegte Spannung deren maximale Geschwindigkeit erreicht. Bei positiver Ladung dagegen wird die letztgenannte Strahlung auf der Elektrode ankommen, während gleichzeitig die erstere auch festgehalten wird, wenn die Spannung hoch genug ist. Wir gewinnen auf diese Weise die Beziehung

$$a = \frac{J_m^+}{J_m} = \frac{1 + \sigma_\mu - k_a + \gamma \cdot k_a (k_\mu + \lambda_\mu)}{1 + \sigma_\mu - (k_a + \lambda_a) + \gamma k_a (k_\mu + \lambda_\mu)},$$

$$b = \frac{J_m}{J_m^-} = \frac{1 + \sigma_\mu - (k_a + \lambda_a) + \gamma k_a (k_\mu + \lambda_\mu)}{1 - (k_a + \lambda_a) + \gamma k_a \cdot k_\mu}.$$

Nach Einsetzen der bekannten Werte k und $(k + \lambda)$ kann aus jeder der beiden Formeln σ_μ berechnet werden. Für Aluminium läßt sich sowohl σ_a als k_a daraus finden als

$$\sigma_a = \frac{d r - c s}{r - (a - 1) s} \quad \text{und} \quad k_a = \frac{c - d(a - 1)}{r - s(a - 1)},$$

wo

$$c = 1 - a + a(k_a + \lambda_a)$$

$$d = b - 1 - (k_a + \lambda_a) \cdot (b - 1)$$

und

$$r = \gamma(k_a + \lambda_a)[a - 1] + 1$$

$$s = \gamma(k_a + \lambda_a) - \gamma \cdot b \cdot k_a$$

gesetzt ist.

39. Es ist bei der Aufstellung der vorstehenden Beziehung eine so starke Ladung der Platte vorausgesetzt, daß die gesamte sekundäre Strahlung jeweils abgehalten oder gebunden wird. Diese Ladung gibt gleichzeitig ein Maß für die maximale Geschwindigkeit der Strahlung.

Aluminium.

Als das Fenster mit einem 0,0000664 cm dicken Blättchen bedeckt war, fanden sich beim Variieren der angelegten

Spannungen die folgenden Ausschläge, immer bezogen auf den Ausschlag 1 der konstanten Kontrollplatte.

Volt:	0	-8	-16	-24	-32
J_m :	1,766	1,532	1,484	1,473	1,491

und entsprechend

Volt:	0	+8	+16	+24	+32
J_m :	1,766	1,911	2,078	2,086	2,081

Die maximale Geschwindigkeit liegt danach zwischen 8 und 16 Volt. Ein ähnliches Resultat — weitere Variation der Spannung wurde nicht vorgenommen — ergab sich für alle übrigen Metalle. Zur Bestimmung von σ_μ genügte deshalb in allen Fällen der für 16 Volt erhaltene Ausschlag, der von demjenigen mit 32 Volt nicht wesentlich verschieden ist.

Tabelle XXX.

d cm	J_m	J_m^+	J_m^-	J_m^+/J_m	J_m^-/J_m	k_a	σ_a
0,0000664	1,766	2,078	1,484	1,177	1,190	0,157	0,127
0,0001328	1,097	1,300	0,919	1,185	1,193	0,150	0,131
Mittel						0,154	0,129

Die Übereinstimmung der Resultate mit den früher angegebenen kann mit Rücksicht auf die mehr provisorischen Versuche im letzten Fall als eine leidliche bezeichnet werden.

Blattmetall.

Die benutzten Blättchen waren in der Dicke etwas inhomogen und nicht ganz lochfrei. Fehler sind indes ausgeschlossen, da die Resultate von der Dicke und der Absorption sich unabhängig erweisen.

Tabelle XXXI.

d cm	J_m	J_m^+	J_m^-	J_m^+/J_m	J_m^-/J_m	σ_μ
0,0000326	1,598		1,303		1,226	0,151
0,0000326	1,657	1,892		1,142		0,169
0,0000483	1,100		0,864		1,273	0,186
Mittel						0,169

Gold.

Die mit drei Dicken angestellten Beobachtungen beziehen sich nur auf negative Ladungen.

Tabelle XXXII.

d cm	J_m	J_m^-	J_m/J_m^-	σ_μ
0,0000154	1,146	0,900	1,273	0,190
0,0000334	0,800	0,636	1,258	0,181
0,0000668	0,724	0,578	1,252	0,177
Mittel				0,183

40. *Zusammenfassung.* Um die vorliegenden Resultate kurz zusammenzufassen, mögen zunächst die Absorptionsverhältnisse, wie sie ins einzelne der Untersuchung unterlagen, einer näheren Betrachtung unterworfen werden. Die folgende Tabelle gibt hierzu einen Überblick. Die Methode *a* bedient sich des Paraffin-, *b* des Käfig-, *c* des blanken Metallkondensators.

Tabelle XXXIII.

Absorptionskoeffizienten.

Substanz	Dickenbereich cm	Methode			Mittel
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	
Aluminium	0,00013—0,00115	4426	4424	4461	4437
"	0,0014	—	—	4890	
Glimmer	0,00023—0,001	4762	—	—	4762
Blattmetall	0,000032—0,00052	11888	—	11984	11936
Silber	0,000018—0,0002	17163	17202	17101	17155
"	0,0004	—	—	18630	
Gold	0,000015—0,00013	27101	27119	27199	27140
"	0,0000077	—	30220	29605	

Die gefundenen Absorptionskoeffizienten erweisen sich als Konstante unabhängig von dem zu ihrer Ermittlung benutzten Apparat; Fehlerquellen, die in ungünstig konstruierter Apparatur ihre Ursache haben könnten, sind demnach als völlig vermieden zu betrachten. Da die Werte außerdem unabhängig sind von den unvermeidlichen Schwankungen der Anfangs-

intensität der Kathodenstrahlen, so stellen sie das wahre Bild des Absorptionsvorganges dar.

Die Zahlenwerte sind innerhalb der bezeichneten, ziemlich umfassenden Dickenbereiche unabhängig von der Dicke der durchstrahlten Schicht; ein merklicher verzögernder Einfluß der Atome der Materie auf die Strahlquanten besteht also nicht innerhalb dieses Bereiches. Nur bei den allerkleinsten Dicken, wie sie bei Aluminium und Gold mit einiger Sicherheit benutzt werden konnten, zeigt sich etwas vermehrte Durchlässigkeit, deren Ursache aber wenigstens zum Teil in einer geringen Inhomogenität der Strahlen liegen wird. Auf einen Geschwindigkeitsverlust weisen aber zweifellos die bei größeren Dicken beobachteten Zunahmen von α hin, die sich mit weiter wachsender Dicke wohl noch deutlicher markieren würden.

Mit diesen Resultaten scheinen von den bis jetzt bekannten Beobachtungen über den Durchgang der Kathodenstrahlen durch feste Körper nahezu nur diejenigen von Hrn. Lenard in Einklang, soweit es sich um die Frage einer Konstanz der Absorptionskoeffizienten für ein größeres Dickenbereich handelt. Zwar hat Hr. Lenard¹⁾ nicht nur für die hier untersuchten Dicken sondern auch für größere, bis 0,003 cm reichende Absorptionskoeffizienten gefunden, die keinen Gang mit der Dicke erkennen lassen; doch es dürfte wohl keinem Zweifel unterliegen, daß diese Abweichung von meinen Resultaten auf die Schwierigkeit zurückzuführen ist, mit denen Phosphoreszenzbeobachtungen ohne Kontrolle der Anfangsintensität der Strahlen der Erreichung großer Genauigkeit entgegenreten.

Demgegenüber wird von Hrn. Seitz²⁾ für kleinste Variation der Dicken — auch innerhalb des von mir untersuchten Bereiches — eine beträchtliche Absorptionsverschiedenheit angegeben, ohne daß zwar eine Geschwindigkeitsabnahme der Strahlen durch direkte Messungen hätte konstatiert werden können. Auffallend ist außerdem, daß die Koeffizienten des Hrn. Seitz merklich kleiner sind als die von mir gefundenen und noch bedeutend viel kleiner als die Zahlen des Hrn. Lenard — für welche Funkenschlagweite die Geschwindigkeit

1) P. Lenard, Wied. Ann. 51. p. 225. 1894; 56. p. 255. 1895.

2) W. Seitz, Ann. d. Phys. 6. p. 1. 1901.

gemessen wurde, gibt Hr. Seitz zwar nicht an. — Nun zeigt eine genaue Betrachtung der für Aluminium gegebenen Resultate des Hrn. Seitz, daß eine etwas andere Zusammenstellung¹⁾ seiner Werte jenen Dickeneinfluß teilweise bedeutend zurücktreten läßt. Beispielsweise findet sich, daß bei 4 cm Funkenlänge (zwischen Spitzen!) aus den Dicken 0,000319 und 0,000218 cm für α der Wert 3570 und weiterhin aus 0,000624 und 0,000319 cm für α = 3680 folgt. Ebenso findet sich einmal aus 0,000912 und 0,000671 cm und 4,4 cm Funkenschlagweite α = 3520, während sich aus demselben Dickenintervall bei 4,5 cm Funkenlänge α = 2570 ergibt, ein Unterschied, der das hinzugefügte Resultat α = 1870 bei 4,5 cm Funken und 0,000671 bis 0,000328 cm Dicke, sofern der kleinere Wert auf die geringeren Dicken zurückgeführt werden soll, als völlig illusorisch erscheinen lassen muß, wenn man noch etwa hinzunimmt, daß für das gleiche zuletzt erwähnte Intervall bei 4,4 cm Schlagweite α = 1880 wird. Wenn trotzdem noch die in Rede stehende Abhängigkeit deutlich merkbar an manchen Stellen auftritt, so könnte man die Ursache in der Konstruktion des Apparates vermuten, wo sich die Blättchen in ziemlich großem Abstand von der auffangenden Wand finden, so daß eine mit der Dicke der Blättchen wachsende Quantenmenge infolge zunehmender Diffusion sich der Beobachtung entziehen mußte.

Durch direkte Beobachtung der durch ein Metallblättchen gegangenen und magnetisch abgelenkten Kathodenstrahlen, weist Hr. Leithäuser²⁾ eine teilweise Geschwindigkeitsabnahme derselben nach, die mit zunehmender Blättchendicke größer wird und demnach verstärkte Absorption hervorrufen mußte. Je größer aber die Erzeugungsspannung der Strahlen wird, desto mehr tritt die Abnahme in den Hintergrund und zwar bei dünnen Aluminiumblättchen schon sehr merklich bei der Steigerung der Spannung auf 17000 Volt, der oberen von Hrn. Leithäuser eingehaltenen Grenze. Die notwendige Konsequenz daraus scheint die zu sein, daß für Geschwindigkeiten, wie sie etwa der doppelten Entladespannung entsprechen, als

1) Spezifische Eigenschaften scheinen den mitgeteilten Werten nicht anzuhaften, die es verbieten würden, eine andere Gruppierung derselben vorzunehmen.

2) G. E. Leithäuser, Diss. Berlin 1903; Ann. d. Phys. 15. p. 283. 1904.

im Maximum von Hrn. Leithäuser angewandt wurde, innerhalb eines von mir als konstant bezeichneten Dickenbereiches eine Geschwindigkeitsabnahme so geringfügig erscheinen wird, daß sie überhaupt nicht in die Erscheinung tritt. Dann *muß*¹⁾ ein Geschwindigkeitsverlust und nur deshalb der Beobachtung *entgehen*, weil er überhaupt nicht merklich vorhanden ist. Während danach die vorliegenden Beobachtungen meiner Ansicht nach eine gute Bestätigung der aus der Leithäuser'schen Arbeit zu ziehenden Schlußfolgerungen bedeuten, scheint dies mit den von Hrn. Leithäuser selbst ausgeführten Absorptionsmessungen nicht der Fall zu sein, da sich nach einer einfachen Umrechnung der angegebenen Durchlässigkeiten²⁾ durchweg Absorptionskoeffizienten ergeben, die für die größere Dicke um etwa 15 Proz. kleiner sind als für das dünnere Blättchen. Beispielsweise findet sich für 16500 Volt der Wert $\alpha = 6150$ für die Aluminiumdicke 0,00018 cm, während für die doppelte Dicke $\alpha = 5260$ folgt, ein Wert, der eher größer zu erwarten gewesen wäre.

Ähnliche Beobachtungen für weit größere Strahlgeschwindigkeiten hat Hr. Des Coudres³⁾ mitgeteilt. Die Resultate scheinen mit den meinigen insofern vereinbar, als sie nur geringe Geschwindigkeitsabnahme anerkennen, die allerdings immer noch für eine geringere Konstanz der Absorptionskoeffizienten sprechen würde. Es ist aber wohl zweifelhaft, ob nicht auch ein deutliches Spektrum ohne eingeschobenes Blättchen erhalten worden wäre bei einer Exposition von vielen Minuten und dabei sicherlich nicht unverändertem Vakuum des Entladerraumes.

Werden endlich die von Hrn. Warburg⁴⁾ für den Durchgang der Kathodenstrahlen durch Metalle unter Verwendung der Leithäuser'schen Beobachtungen theoretisch gefundenen Beziehungen mit den mitgeteilten Versuchsergebnissen zusammen-

1) Vgl. G. E. Leithäuser, Diss. p. 25. 1903; Ann. d. Phys. 15. p. 306. 1904.

2) Der Wert von α ist nach der in der betreffenden Arbeit gegebenen Definition der „Durchlässigkeit“ berechnet aus $\alpha = 1/d \log_{nat} 1/D$; andere Anhaltspunkte sind nicht gegeben.

3) Th. Des Coudres, Physik. Zeitschr. 4. p. 140. 1902.

4) E. Warburg, Verhandl. Phys. Gesellsch. 1. p. 9. 1904.

gestellt, so findet sich, daß die aus der für die Absorption maßgebenden Formel

$$m_0 = \frac{d \text{ cm}}{0,00018} \left(\frac{15800}{V} \right)^{4,45}$$

berechneten Absorptionskoeffizienten sich so weit von der Beobachtung entfernen, daß auch dann noch eine völlige Diskrepanz bestände, wenn man der Genauigkeit der Formel großen Spielraum ließe. Besonders im Widerspruch mit allen bekannten Beobachtungen — die Leithäuserschen ausgenommen — würde das Ergebnis der Formel stehen, das für größere Dicken eine Abnahme der Absorption fordert.

41. Was das Verhältnis der für verschiedene Substanzen gefundenen Absorptionskoeffizienten untereinander und deren Beziehung zur Dichte betrifft, so ergeben sich deutliche Abweichungen vom Massenproportionalitätsgesetz aber in entgegengesetzter Richtung, als früher von Hrn. Lenard¹⁾ gefunden wurde. Die folgende Tabelle gibt die Resultate; die ersten Kolonnen enthalten die Quotienten der Absorptionskoeffizienten der beigeschriebenen Substanz und jeweils Aluminium 1. wie sie von Hrn. Lenard und 3. wie sie von mir gefunden wurden.

Tabelle XXXIV.

Metall	Verhältnis der α			Verhältnis der Dichten	$\frac{\alpha}{\text{Dichte}}$
	1. Lenard	2. Lenard	3. Becker		
Aluminium	1	1	1	1	1643
Blattmetall	3,35	2,55	2,69	3,29	1341
Silber	4,51	3,53	3,86	3,89	1634
Gold	7,77	7,05	6,11	7,15	1406

Der Gegensatz zwischen 1. und 3. fällt fort, wenn die von Hrn. Lenard benutzte Beziehung eine Korrektion erfährt, welche die von mir für die Oberfläche nachgewiesene Reflexion berücksichtigt. Während nämlich das Verhältnis der Absorptionskoeffizienten zweier Metalle nur dann dem reziproken Verhältnis ihrer Dicken d und l , wie es Hr. Lenard tat,

1) P. Lenard, Wied. Ann. 56. p. 255. 1895.

gleichgesetzt werden kann, wenn keine Oberflächenreflexion besteht, ist dieses Verhältnis den Tatsachen entsprechend in der modifizierten Weise

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{d}{l} - \frac{\log \frac{1 - k_\alpha}{1 - k_\mu}}{\alpha \cdot l}$$

auszudrücken. Die unter Zugrundelegung der von mir ermittelten Reflexionskoeffizienten danach korrigierten Werte des Hrn. Lenard sind unter 2. verzeichnet. Die Abweichungen vom Verhältnis der Dichten erfolgen jetzt im gleichen Sinne wie bei mir. Es ist zu schließen, daß von den untersuchten Metallen relativ zur Dichte am stärksten Aluminium und Silber die Quanten absorbieren, während Kupfer und Gold viel weniger absorbieren.

42. Nach den Vorstellungen, welche den Absorptionsverlauf der Strahlen am einfachsten dem Verständnis nahelegen, betrachten wir jeden materiellen Körper als bestehend aus einer seinem Gewicht proportionalen Zahl x von Dynamiden. Ein Raumelement von der Größe $1/s_1$ eines Körpers müßte dann genau ebensoviel absorbieren als ein anderes Raumelement von der Größe $1/s_2$ eines anderen Körpers, wo s_1 und s_2 die Dichten der Körper sind, wenn die Dynamiden aller Körper als völlig identisch betrachtet würden und keine gegenseitige Dekung ihrer Sphären bestände. Da die Resultate der Beobachtung dieser Folgerung nicht entsprechen, ist anzunehmen, daß die Summe der absorbierenden Querschnitte einer in der Raumeinheit enthaltenen gleichen Zahl von Dynamiden für verschiedene Körper eine verschiedene ist. Wird diese Verschiedenheit zurückgeführt auf eine variable Größe des Momentes einer Dynamide, so würde folgen, daß die Summe der Dynamidenmomente einer für alle Substanzen gleichgroßen Zahl von Dynamiden bei Aluminium und Silber nahezu dieselbe, bei Gold dagegen eine um 15 Proz. und bei Kupfer um 20 Proz. kleinere wäre. Würden auch für ein und dasselbe Element nicht nur exakt gleiche Dynamiden zugelassen, so würde dieser Schluß ebenso bestehen, solange er keine Aussage für die einzelne Dynamide enthält.

43. *Reflexion.* Wird ein Metall von einem schnellen Kathodenstrahl getroffen, so findet an der Oberfläche eine

Zurückwerfung eines Bruchteiles der Strahlung statt. Die als Reflexionskoeffizienten zu bezeichnenden Größen betragen für die untersuchten Substanzen:

Aluminium	0,172
Blattmetall	0,407
Silber	0,433
Gold	0,496—0,56

Die reflektierte Quantenmenge scheint in geringem Maße von der Dicke der reflektierenden Schicht abzuhängen, wie es besonders deutlich durch die Beobachtungen an Gold zum Ausdruck kommt, das in äußerst geringen Dicken verfügbar war. Es deutet dies darauf hin, daß sich unter den reflektierten Strahlen auch solche finden, die aus einiger Tiefe vom Metall zurückkommen, und zwar scheint dieses Umkehren um so mehr bei den dichteren Substanzen stattzufinden. Die Zahlenwerte sind alle wesentlich kleiner als die von Hrn. Starke angegebenen „Reflexionskoeffizienten“, sie nehmen wie diese, aber viel regelmäßiger, mit der Dichte des Metalls zu, bei größerer Dichte langsamer.

44. *Sekundäre Emission.* Neben dem Vorgang der Reflexion findet beim Auftreffen der schnellen Primärstrahlen ebenso ein Auslösen langsamer sekundärer Strahlung statt, wie es Hr. Lenard¹⁾ für langsamere Primärgeschwindigkeiten nachgewiesen hat. In der Tabelle bezeichnet λ_μ den Koeffizienten für die an der von Strahlen getroffenen Vorderfläche, σ_μ für die an der Hinterfläche auftretenden Sekundärstrahlen.

Tabelle XXXV.

Sekundärstrahlung.

Metall	λ_μ	σ_μ Methode		
		<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
Aluminium . . .	0,132	0,134	0,141	0,129
Blattmetall . . .	0,141	—	0,152	0,169
Silber	0,203	0,186	0,229	—
Gold	0,138	0,153	0,177	0,186

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 15. p 485. 1904.

Die Größe der Sekundärstrahlung scheint danach in keinem merklichen Zusammenhang mit der Richtung der Primärstrahlen zu stehen, da die Werte von λ und σ nahezu dieselben sind. Die Unterschiede der Quantenmengen sind für die verschiedenen Metalle ziemlich geringe und durchaus in keiner Beziehung zur Dichte der Substanz, indem Silber am wirksamsten und Blattmetall kaum wirksamer erscheint als Aluminium. Die konstatierte Erscheinung scheint quantitativ schwer vergleichbar mit der lichtelektrischen Wirkung, weil trotz der Ähnlichkeit der mit Kathodenstrahlen und mit ultraviolettem Licht in dieser Hinsicht erhaltenen Resultate doch der Mechanismus der Auslösung in beiden Fällen wesentlich verschieden sein muß. Besonders scheinen die Erscheinungen der lichtelektrischen Wirkung fast ausschließlich an die Beschaffenheit der Oberfläche gebunden zu sein, während für die Kathodenstrahlen nur das Metallatom — wenigstens zum größten Teil — maßgebend erscheint. Dies wird deutlich beim Vergleichen der von Hrn. Ladenburg¹⁾ zusammengestellten Wirksamkeiten verschiedener Metalle für ultraviolettes Licht mit meinen Beobachtungen für Kathodenstrahlen, welche niemals eine Abhängigkeit der λ -Werte von der Oberflächenbeschaffenheit, ob poliert oder nicht, erkennen ließen.

Ein Einblick in die hier vorliegenden Verhältnisse scheint mir gewonnen zu werden durch die Annahme, daß die in einem betrachteten Punkt des Metalles ausgelöste Sekundärstrahlung nicht nur proportional sei der dort herrschenden Primärintensität sondern auch der vorhandenen Dynamidenzahl. Für Gase ist diese Vorstellung in vollem Einklang mit der Erfahrung über Leitfähigkeit, als deren Ursache nach Hrn. Lenard²⁾ die Auslösung sekundärer Strahlung aus den Atomen zu betrachten ist. Für die Beobachtung an Metallen zunächst kommen von der von einer Stelle des Raumes ausgehenden sekundären Quantenmenge nur diejenigen Quanten in Betracht, die durch die Fläche zum Austritt gelangen, was wiederum abhängen wird von der Größe der Absorption, welche dieselben auf ihrem Wege erfahren. Innerhalb der Dicken, in denen

1) E. Ladenburg, Ann. d. Phys. 12. p. 571. 1903.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 475. 1903.

der Primärstrahl in verschiedenen Metallen die gleiche Intensität besitzt, findet sich nahezu dieselbe Anzahl Dynamiden — die Abweichung der Metalle vom Massengesetz gibt die Beschränkung — und die Dicken werden sich verhalten wie die Dichten der Metalle. Würde nun auch die Absorption der sehr langsamen Quanten im Verhältnis der Dichten erfolgen, so wäre nach vorstehendem zu erwarten, daß für alle Substanzen der Koeffizient der Sekundärstrahlung sich gleichgroß ergäbe.

Daß dies mit der Beobachtung nicht übereinstimmt, lenkt die Erwägung zunächst hin auf die von Hrn. Lenard¹⁾ an Gasen gewonnenen Erfahrungstatsachen, daß bei sehr kleinen Strahlgeschwindigkeiten die Masse nicht mehr allein bestimmend ist für die Größe der Absorption, so daß — wenn wir die Erfahrung wenigstens zum Teil auf feste Körper übertragen — schwerere Metalle ihrer Dichte entsprechend gegenüber den leichteren um so mehr sekundäre Strahlen emittieren werden, je geringer der Quotient von Absorptionsvermögen und Dichte für solche Strahlen ist. Wenn nun auch ohne weiteres keine Berechtigung besteht zur Übertragung der für Gase geltenden Veränderlichkeit des α -Wertes mit der Geschwindigkeit auf Metalle, so scheint auch hier nur ein angenäherter Vergleich mit den Beobachtungsergebnissen zur weiteren Annahme zu nötigen, daß jeder Substanz noch die Fähigkeit zuzuerkennen ist, leichter oder schwerer ein negatives Quant abzugeben. Ob außerdem noch eine Oberflächenwirkung hinzuzunehmen wäre, läßt sich bei der gänzlichen Unkenntnis vom Absorptionsverlauf für langsame Strahlen in Metallen nicht entscheiden. Daher empfiehlt es sich, von den Beobachtungen an Gasen weitere Aufklärung zu erwarten insbesondere über die Möglichkeit, die leichtere oder schwerere Abtrennung elektrischer Quanten mit den näher bekannten Eigenschaften der Dynamiden in Zusammenhang zu bringen.

45. Vergleichen wir noch die gefundenen Konstanten der Sekundärstrahlung mit dem von Hrn. Lenard²⁾ für 4000 Volt-Strahlen zu 1,9 angegebenen Wert, so findet sich der Größen-

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 715. 1904.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 15. p. 507. 1903.

ordnung nach für feste Körper etwa dasselbe Verhältnis, wie es für Gase aus einem Vergleich der Lenardschen Werte mit den von Hrn. Durack¹⁾ aus der Leitfähigkeit erhaltenen folgt.²⁾

3. Absorption in Gasen.

46. Es lag nahe, durch die Absorptionsbeobachtungen schneller Kathodenstrahlen in Gasen auf einfachem Wege weitere Anhaltspunkte für unsere Vorstellungen von den Kräften erwarten zu dürfen, welche die durch die kinetische Gastheorie schon klar gezeichneten Atome oder Moleküle der Gase aufeinander ausüben. Denn bei den nahen Beziehungen, die in unserer Zeit zwischen Licht und Elektrizität erkannt sind, liegt der Gedanke nicht fern, die durch den Äther übertragenen Kräfte der Atome als elektrische aufzufassen, ebenso wie die Bewegungen im Innern der Atome, welche ihnen Kraft und Wesen verleihen, nach den neueren Untersuchungen besonders von Hrn. Lenard — und auch schon seit die Spektren der Elemente nach Hertz als Folge elektrischer Schwingungen der Atome aufzufassen waren — zweifellos als elektrische anzusehen sind. —

47. *Methode.* Der für die Untersuchung der Gase benutzte Apparat ist in Fig. 5 abgebildet. In die schon früher

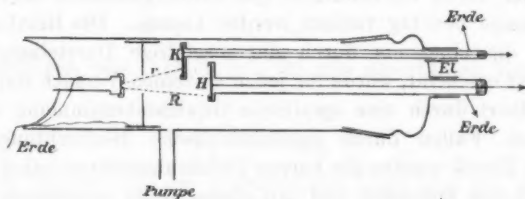


Fig. 5.

benutzte Versuchsröhre wurden zwei der bekannten Paraffinkondensatoren, von geerdeten Messingröhrchen gehalten, eingeführt derart, daß der etwas größere und besonders empfindlich konstruierte Kondensator *H* in der Achse der Röhre lag, während der kleinere Kondensator *K* in genau gemessenem

1) J. J. E. Durack, Phil. Mag. (6) 4. p. 29. 1902.

2) Vgl. P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 488. 1903.

Abstand vor demselben etwas seitlich aufgestellt war. Auf diese Weise erhielt der erstere, sogea. Hauptkondensator, die Hauptmenge aller vom Fenster des Entladerohres ausgehenden Strahlen, während der zweite die diffuser verlaufenden auffing, deren Intensität in allen Fällen der mit H aufgefangenen Ladung proportional sein mußte, und deshalb zur Kontrolle diente. Die Beobachtungen wurden dann in der Weise ausgeführt, daß wie bei Metallen zuerst die in H auftretende Quantenmenge im Quadrantelektrometer gemessen und danach ebenso die zuerst in Leidener Flaschen gesammelte Ladung von K ermittelt wurde. Das Verhältnis der Elektrometerausschläge von K und H war dann unter denselben äußeren Bedingungen konstant und völlig unabhängig von den Schwankungen der Anfangsintensität der Strahlen. Es ist zu bemerken, daß die Entfernung der beiden Kondensatoren vom Fenster der Entladeröhre und die Öffnung der zwischengesetzten Blende so gewählt wurden, daß immer nur schwach geneigte Strahlen die Kondensatoren noch treffen konnten.

Die ganze Röhre konnte durch eine angesetzte Quecksilberpumpe vollständig evakuiert und durch dieselbe Ansatzröhre vermöge eines zwischengeschalteten Zweiweghahnes mit den zu untersuchenden Gasen gefüllt werden, deren Druck entweder durch die benutzten Quecksilbergasometer oder durch die Pumpe beliebig variiert werden konnte. Die Reinheit der Gase, die einerseits durch die sorgfältige Darstellungsweise verbürgt erscheint, wurde für jeden einzelnen Versuch durchweg kontrolliert durch eine spezifische Gewichtsbestimmung und in manchen Fällen durch spektroskopische Beobachtung. Zu diesem Zweck wurden die kurzen Zuführungsröhren nebst einem ca. 120 ccm fassenden und mit einem Hahn versehenen Glaskolben aufs äußerste evakuiert und nach Abschluß des Absorptionsversuches eine gewisse Gasmenge in den Kolben überführt bei genauer Messung des Druckes und der Temperatur. Dann ergab die Wägung, verglichen mit dem Gewicht des evakuierten und des mit trockener atmosphärischer Luft gefüllten Ballons, das spezifische Gewicht des Gases oder auch dessen Molekulargewicht. Für spektroskopische Beobachtungen war an die Zuleitungsröhre gleichzeitig eine kleine Geissler-röhre angeschmolzen.

48. Nach den früheren Entwicklungen (18) ist die von einem Paraffinkondensator angezeigte Ladung durch

$$J = f i_0 (1 - k_a)$$

gegeben, oder, wenn der in den gegenwärtigen Versuchen konstante Ausdruck $(1 - k_a)$ noch zum Proportionalitätsfaktor gerechnet wird,

$$J = f_0 i_0.$$

Diese Beziehung gilt sowohl für die Haupt- wie für die Kontrollelektrode, außerdem wird aber für jede der beiden Elektroden noch ein weiterer Proportionalitätsfaktor p einzuführen sein, der die Lage der Kondensatoren und damit den Bruchteil der von ihnen abgefangenen Gesamtstrahlenmenge berücksichtigt. Nennen wir die in K gemessene Intensität i , diejenige von H dagegen J , so wird also sein

$$J = a_1 p_1 \cdot f_1 i_0 \quad \text{und} \quad i = a_2 p_2 f_2 i_0,$$

so daß das Verhältnis beider von der Anfangsintensität i_0 unabhängig ist. Die Konstante a ist der Ausdruck für die Beeinflussung der Strahlen auf ihrem Wege vom Fenster zum Kondensator, sie wird also die Größe der Absorption der Strahlen angeben und mit

$$a_1 = e^{-aR}, \quad a_2 = e^{-ar}$$

zu bezeichnen sein. Dann gilt für den gaserfüllten Raum

$$\frac{J_g}{i_g} = \frac{e^{ar} \cdot p_1 f_1}{e^{aR} \cdot p_2 f_2}.$$

Da sich die nur von der gegenseitigen Lage und von der Beschaffenheit der beiden Kondensatoren abhängigen Werte p und f nicht ändern werden, wenn der Versuchsraum evakuiert ist, so ergibt sich für den evakuierten Raum

$$\frac{J_e}{i_e} = \frac{p_1 f_1}{p_2 f_2},$$

so daß schließlich

$$\frac{J_g}{i_g} = \frac{e^{ar} \cdot J_e}{e^{aR} \cdot i_e} \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{\log \left[\frac{J_e}{i_e} : \frac{J_g}{i_g} \right]}{R - r}$$

wird.

Der Absorptionskoeffizient eines Gases ist danach zu gewinnen aus einer Beobachtung im Vakuum verbunden mit einer solchen im Gas, wobei nicht der absolute Abstand jedes Kondensators vom Fenster, sondern nur der gegenseitige Abstand beider bekannt sein muß.

Da sich, wie früher schon angedeutet, ergab, daß der Paraffinkondensator kleinen Empfindlichkeitsschwankungen ausgesetzt ist, wurde jeweils miteinander verbunden ein Versuch im Vakuum, ein solcher im Gas und darauf nochmals im Vakuum. Um außerdem die Richtigkeit der obigen Formel zu prüfen, wurden für jedes Gas Versuche mit zwei verschiedenen Abständen $R - r$ ausgeführt, die ich mit Hilfe eines Kathetometers ermittelte, und die das eine Mal 0,76 cm, das zweite Mal 1,41 cm betrug.

49. Es entstand noch die Frage, ob vielleicht die Dichte des durchstrahlten Gases merklich könnte beeinflußt werden durch gleichzeitig in der Versuchsröhre vorhandene Fett- oder Paraffindämpfe, so daß die Absorption falsche Werte annehmen würde. Ich habe, um hierüber Aufschluß zu bekommen, durch genaue Wägungen festgestellt, ob die genannten beiden Stoffe im Laufe mehrerer Tage im Vakuum merkliche Gewichtsabnahme zeigen und gefunden, daß etwa 600 mg des zur Dichtung des großen Glasschliffes benutzten Fettes, das in einer kleinen Schale aus Aluminiumblech 68 Stunden im Vakuum stand, gegen die anfängliche Wägung eine Gewichts Differenz von nur 0,016 mg zeigte, was noch innerhalb der Fehlergrenze der Wägung liegt. Daß dieses Fett während der Dauer eines Versuches die geringste Spur Dämpfe abgeben sollte, ist danach nicht anzunehmen.

Die exakte Wägung von etwa 800 mg ausgekochtem und auf einem Aluminiumblech erstarrten Paraffin ließ eine kleine Gewichtsabnahme von 0,317 mg in 56 Stunden wahrnehmen; diese Menge verdampfte in dem 181,5 ccm fassenden Raum der Versuchsröhre und würde sonach einer Gasmenge von der Dichte $0,00000174 \text{ g/cm}^3$ entsprechen, die so gut wie keinen Einfluß auf die Absorptionsgröße ausübt, im gegenwärtigen Fall um so weniger, als die Versuchsdauer ca. 3 Stunden nie überschritt. Es kann daraus geschlossen werden, daß die

beobachteten Absorptionskoeffizienten in der Tat unbeeinflusst den betreffenden reinen Gasen zuzuschreiben sind.

50. *Messungen.* Die in den folgenden Zusammenstellungen angegebenen Zahlen für J/i sind wieder Mittelwerte aus durchschnittlich 10 Einzelbeobachtungen, welche nicht mehr voneinander abweichen als früher (17) schon gezeigt ist. An den Kopf der Tabellen habe ich links den Mittelwert σ_0 aus den einzelnen Dichtebestimmungen, bezogen auf 0° und 760 mm Druck — für Wasserstoff von gleicher Temperatur und gleichem Druck 2 gesetzt — und zum Vergleich rechts die für vollkommen reine Gase für dieselben äußeren Bedingungen bekannten¹⁾ Dichten s_0 geschrieben. Die Ermittlung der Absorptionswerte bezieht sich auf eine durchschnittliche Temperatur von 20°, für welche auch die in den letzten Kolonnen der Tabellen stehenden Dichten gelten; die angegebenen Quotienten von Absorptionsvermögen pro 1 mm Gasdruck und Gasdichte bedürfen daher keiner weiteren Temperaturkorrektion.

a) Luft.

Reine, durch Watte filtrierte Zimmerluft, die durch Phosphorperoxyd getrocknet ist. Es wurde hier zunächst Wert darauf gelegt, den Zusammenhang zwischen Absorptionsvermögen und Druck einwandfrei festzustellen. Die Beobachtungen waren hier allerdings wie bei allen schwereren Gasen nicht ganz bis auf den Gasdruck von einer Atmosphäre möglich, da bei dem relativ großen Abstand des Kondensators vom Fenster die Elektrometerausschläge zu klein geworden wären. Das Verhältnis von J/i fürs Vakuum, wie es vor und nach jeder Gasuntersuchung ermittelt wurde, ist einzeln verzeichnet; aus den beiden wenig voneinander abweichenden Werten habe ich zur Berechnung das Mittel genommen.

Die für den Kondensatorabstand von 1,41 cm ausgeführten Messungen sind mit *) bezeichnet.

1) Die Atomgewichte sind der Tabelle der Internationalen Atomgewichtskommission vom Jahre 1903 entnommen.

Tabelle XXXVI.

$\sigma_0 = 28,88.$

$s_0 = 28,88.$

Druck	J/i		Verhältnis	α	$\frac{\alpha}{p}$
	Vakuum	Gas			
mm				cm^{-1}	cm^{-1}/mm
22,4	1,405	} 1,332	1,050	0,0642	0,00286
	1,393				
37,8	1,884	} 1,743	1,0797	0,1009	0,00267
	1,880				
47,3	1,297	} 1,179	1,1018	0,1275	0,00269
	1,301				
70,9	1,079	} 0,922	1,160	0,1953	0,00275
	1,061				
105,2	1,078	} 0,861	1,248	0,2914	0,00277
	1,070				
181,6	1,273	} 0,857	1,472	0,585	0,00280
	1,251				
250,1	1,292	} 0,765	1,684	0,6853	0,00274
	1,283				
362,8	1,876	} 0,861	2,184	1,0267	0,00283
	1,888				
424,0	1,884	} 0,753	2,508	1,2084	0,00285
	1,895				
10,8*)	0,988	} 0,9435	1,0434	0,0301	0,00279
	0,981				
93,5*)	0,995	} 0,688	1,436	0,2562	0,00274
	0,981				
210,2*)	0,952	} 0,410	2,336	0,6012	0,00286
	0,966				
Mittel					0,00278

Soweit der Druck variiert wurde, ist das auf den Druck 1 mm bezogene Absorptionsvermögen als vom Druck unabhängig zu betrachten. Dieses Resultat ist mit früheren Beobachtungen von Hrn. Lenard¹⁾ in Übereinstimmung. Als Verhältnis von erhaltenem Mittelwert der Absorption und Gasdichte findet sich

$$\frac{\alpha}{p} : \sigma_{20} = 0,000 103.$$

1) P. Lenard, Wied. Ann. 51. p. 225. 1894; 56. p. 255. 1895.

b) Wasserstoff.

Hergestellt aus chemisch reinem platinieren Zink und reiner verdünnter Schwefelsäure, in destilliertem Wasser gewaschen und durch Natron und Phosphorpentoxyd geleitet.

Zur weiteren Prüfung des oben konstatierten Zusammenhanges sind auch am Wasserstoff ausreichende Variationen des Druckes vorgenommen worden. Für das Vakuum sind nur die Mittelwerte der beiden J/i mitgeteilt; ebenso schien die Angabe des Verhältnisses J/i für Vakuum und Gas entbehrlich.

Tabelle XXXVII.

$\sigma_0 = 2,03.$

$s_0 = 2,00.$

Druck	J/i		α	$\frac{\alpha}{p}$
	Vakuum	Gas		
mm			cm^{-1}	
85,7*)	1,005	0,966	0,0280	0,000327
128,3*)	0,993	0,935	0,0427	0,000333
189,1	1,2095	1,1538	0,0622	0,000329
230,4	1,2071	1,1393	0,0760	0,000330
401,0	1,2901	1,1646	0,1343	0,000335
548,6	1,2967	1,125	0,1865	0,000340
664,7	1,3343	1,1343	0,2134	0,000321
752,5	1,351	1,113	0,2543	0,000338
420,2*)	0,967	0,7909	0,1424	0,000339

Mittel 0,000337

Hieraus wird

$$\frac{\alpha}{p} : \sigma_{20} = 0,000178.$$

Es bestätigt sich auch hier die Konstanz des Quotienten aus Absorptionsvermögen und Druck des Gases. Es wurden deshalb für alle folgenden Gase die Messungen nur für eine geringere Zahl verschiedener Drucke ausgeführt, und die letzteren wurden immer so gewählt, daß die Beobachtungen möglichst günstige Resultate versprechen mußten; dies ist der Fall, wenn nicht zu niedrige Drucke angewandt werden, aber auch nicht zu hohe, für welche die Absorption die meßbare Intensität zu sehr schwächte. Zur Berechnung des für den Druck 1 mm geltenden Absorptionsvermögens ist durchweg die nachgewiesene Proportionalität zugrunde gelegt.

e) Helium.

Dargestellt durch Ausglühen von pulverisiertem Cleveit in einer schwer schmelzbaren, völlig evakuierten Glasröhre. Die Reinigung des Gases geschah durch Überleiten über Natronkalk zur Absorption von Kohlensäure, glühendes Kupferoxyd zum Entfernen von Wasserstoff und Kohlenwasserstoffen, schließlich nochmals festes Natron und Phosphorsäure. Das schließlich erhaltene Gas zeigte im Geisslerrohr noch Spuren von Stickstoff.

Tabelle XXXVIII.

$$\sigma_0 = 4,236.$$

$$s_0 = 3,96.$$

Druck	J/i		α	$\frac{\alpha}{p}$	σ_i^{760}
	Vakuum	Gas			
mm			cm^{-1}		
348,5	1,008	0,9308	0,1049	0,000301	3,910
388,5	0,887	0,814	0,1126	0,000290	3,962
399,8	1,008	0,922	0,1167	0,000292	3,962
389,6*)	0,958	0,841	0,1118	0,000287	3,954
Mittel				0,000292	3,947

Es folgt

$$\frac{\alpha}{p} : \sigma_{20} = 0,000074.$$

d) Methan.

Dargestellt durch schwaches Erhitzen von 1 Teil Natriumacetat und 4 Teilen Baryumoxyd, gereinigt durch Natronlauge und konzentrierte Schwefelsäure, getrocknet durch P_2O_5 . Das mit *) bezeichnete Methan aus Zinkmethyl und Wasser sollte besonders rein sein.

Tabelle XXXIX.

$$\sigma_0 = 16,652.$$

$$s_0 = 15,91.$$

Druck	J/i		α	$\frac{\alpha}{p}$	σ_i^{760}
	Vakuum	Gas			
mm			cm^{-1}		
149,4	1,321	1,029	0,3286	0,00220	15,482
212,6	1,3134	0,897	0,5011	0,00235	15,532
244,7 *)	1,320	0,842	0,5909	0,00241	15,420
203,2 *)	0,976	0,5208	0,4450	0,00219	15,571
311,0 *)	1,542	0,547	0,7339	0,00236	—
Mittel				0,00230	15,515

$$\frac{\alpha}{p} : \sigma_{20} = 0,000148.$$

e) Ammoniak.

Dargestellt durch Erhitzen von chemisch reinem NH_4Cl mit geglühtem Marmor und getrocknet durch frisch bereitetes Baryumoxyd.

Tabelle XL.

$\sigma_0 = 17,170.$

$s_0 = 16,93.$

Druck	J/i		α	$\frac{\alpha}{p}$	σ_i^{760}
	Vakuum	Gas			
mm			cm^{-1}		
121,5	1,1556	0,946	0,2631	0,00216	16,048
143,0	1,1539	0,904	0,3211	0,00224	—
167,5	0,908	0,688	0,3646	0,00217	15,741
95,7*)	0,983	0,7363	0,2048	0,00214	16,056
151,3*)	0,992	0,6201	0,3328	0,00220	—
204,1*)	1,003	0,5597	0,451	0,00221	16,088
Mittel			0,00219		15,998

Hieraus

$$\frac{\alpha}{p} : \sigma_{20} = 0,000137.$$

f) Äthylen.

Dargestellt durch gelindes Erhitzen von 1 Teil Alkohol und 4 Teilen konzentrierter Schwefelsäure und durchgeleitet durch Natronlauge und konzentrierte Schwefelsäure, getrocknet über P_2O_5 .

Tabelle XLI.

$\sigma_0 = 27,89.$

$s_0 = 27,82.$

Druck	J/i		α	$\frac{\alpha}{p}$	σ_i^{760}
	Vakuum	Gas			
mm			cm^{-1}		
100,7	1,016	0,795	0,3223	0,00320	26,131
120,8	1,1744	0,8657	0,4010	0,00332	26,059
287,0	1,150	0,5534	0,9614	0,00335	26,021
166,3*)	0,982	0,4536	0,5471	0,00329	26,080
271,2*)	0,990	0,2757	0,9058	0,00334	—
Mittel			0,00330		26,074

Es ist

$$\frac{\alpha}{p} : \sigma_{20} = 0,000126.$$

g) Stickstoff.

Als chemischer Stickstoff dargestellt durch Zufügen einer wässerigen Lösung von Kaliumnitrit zu einer kochenden Lösung Chlorammonium und Kaliumbichromat. Das entstandene Gas wurde über rotglühendes Kupfer, feuchtes Natron, konzentrierte Schwefelsäure und P_2O_5 geleitet.

Tabelle XLII.

 $\sigma_0 = 27,916.$ $s_0 = 27,86.$

Druck	J/i		α	$\frac{\alpha}{p}$	σ_i^{700}
	Vakuum	Gas			
mm			cm^{-1}		
98,7	1,680	1,3695	0,2684	0,00272	26,076
180,5	0,812	0,557	0,4964	0,00275	26,093
293,0	1,676	0,8897	0,8321	0,00284	26,101
201,4*)	0,988	0,447	0,5619	0,00279	26,091
Mittel			0,00278		26,090

Daraus

$$\frac{\alpha}{p} : \sigma_{20} = 0,000106.$$

h) Sauerstoff.

Dargestellt durch Erhitzen von reinem Kaliumchlorat, zur Reinigung über glühendes Silber, durch starke Natronlauge und konzentrierte Schwefelsäure geleitet, getrocknet mit P_2O_5 .

Tabelle XLIII.

 $\sigma_0 = 31,73.$ $s_0 = 31,76.$

Druck	J/i		α	$\frac{\alpha}{p}$	σ_i^{700}
	Vakuum	Gas			
mm			cm^{-1}		
111,4	1,685	1,3257	0,3152	0,00283	29,502
158,9	0,802	0,5641	0,4624	0,00291	29,518
270,3	1,704	0,940	0,7811	0,00289	—
169,1*)	0,993	0,5188	0,4667	0,00276	29,508
Mittel			0,00285		29,511

Hieraus ist

$$\frac{\alpha}{p} : \sigma_{20} = 0,0000962.$$

i) Argon.

Dargestellt nach einer früher¹⁾ beschriebenen Methode mit Hilfe elektrischer Funken; das Gas zeigte nach Weiterfunken im kleinen Maßstab und Entfernen des Sauerstoffs durch Pyrogallol in der Geissleröhre bei 3 mm Druck Argon, Quecksilberdampf und etwas über 1 Proz. Stickstoff.

Tabelle XLIV.

$\sigma_0 = 39,72.$

$s_0 = 39,88.$

Druck	J/i		α	$\frac{\alpha}{p}$	σ_i^{700}
	Vakuum	Gas			
mm			cm^{-1}		
55,8*)	0,988	0,7758	0,1713	0,00307	37,010
109,2*)	0,995	0,6067	0,3505	0,00321	—
183,0*)	1,102	0,4884	0,5764	0,00315	37,004
Mittel				0,00314	37,007

$$\frac{\alpha}{p} : \sigma_{20} = 0,000084.$$

k) Kohlensäure.

Dargestellt durch Erhitzen von reinem trockenem Natriumbikarbonat in einer evakuierten Röhre, getrocknet über P_2O_5 .

Tabelle XLV.

$\sigma_0 = 43,77.$

$s_0 = 43,67.$

Druck	J/i		α	$\frac{\alpha}{p}$	σ_i^{700}
	Vakuum	Gas			
mm			cm^{-1}		
80,9	1,230	0,9486	0,3414	0,00420	40,935
98,6	1,216	0,891	0,4088	0,00414	—
170,2	1,574	0,9055	0,7267	0,00427	40,870
143,1*)	0,980	0,411	0,6153	0,00430	40,901
197,0*)	0,996	0,3072	0,8333	0,00423	—
Mittel				0,00423	40,908

$$\frac{\alpha}{p} : \sigma_{20} = 0,000103.$$

1) A. Becker, Zeitschr. f. Elektroch. 9. p. 600. 1903.

1) Schweflige Säure.

Dargestellt durch Erhitzen reinen Kupfers in reiner konzentrierter Schwefelsäure; das Gas wurde durch eine Lösung von schwefelsaurem Natrium, durch festes schwefelsaures Kalium geleitet und über P_2O_5 getrocknet.

Tabelle XLVI.

 $\sigma_0 = 63,57.$ $s_0 = 63,59.$

Druck	J/i		α	$\frac{\alpha}{p}$	σ_1^{760}
	Vakuum	Gas			
mm			cm^{-1}		
67,1	1,5345	1,113	0,4224	0,00629	59,430
92,8	1,5345	0,994	0,5713	0,00615	—
178,5	1,627	0,700	1,1085	0,00621	59,302
120,1 *)	0,9841	0,3417	0,7494	0,00624	59,477
Mittel				0,00622	59,410

Es wird

$$\frac{\alpha}{p} : \sigma_{20} = 0,000104.$$

51. Den mitgeteilten Versuchsergebnissen ist zunächst zu entnehmen, daß auch bei Gasen das Gesetz der Massenproportionalität nur angenähert gilt, daß mit Sicherheit merkliche Abweichungen konstatiert sind, die sich besonders groß ergaben für Wasserstoff im einen und Helium im andern Sinn. Nach den Vorstellungen, die durch Hrn. Lenard von der Konstitution der Materie gegeben wurden, und welche gelehrt haben, als Grundbestandteile jedes Atoms sogenannte Dynamiden, d. h. elektrische Doppelpunkte von der Ladung eines Elementarquantums und von gewissem gegenseitigem Abstand — also von gewissem Moment — anzunehmen, lassen sich die erwähnten Resultate folgendermaßen deuten¹⁾: Jedes Atom aller (untersuchten) Gase besteht aus einer seinem Gewicht proportionalen Zahl von Dynamiden, die alle genau gleich schwer und gleich träge seien. Die Absorptionsbeobachtungen nötigen zu der weiteren Annahme, daß jeder Dynamide ein gewisser absorbierender Querschnitt zuzuschreiben sei, derart, daß die

1) Vgl. P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 714. 1903. Vgl. auch (42).

auf einen solchen Querschnitt fallenden Quanten zurückgehalten, die neben ihm vorbeigehenden mit nahezu unveränderter Geschwindigkeit durchgelassen werden. Da in diesem Sinne die im vorhergehenden gemessenen und auf den gleichen Gasdruck bezogenen Absorptionskoeffizienten die Summen der absorbierenden Querschnitte aller in 1 cm^3 der betreffenden Gase bei dem konstanten Druck vorhandenen Dynamiden direkt in Quadratcentimetern angeben, so erhalten wir in einfacher Weise die Querschnittsumme einer gleichgroßen Anzahl Dynamiden verschiedener Gase, wenn wir deren Absorptionskoeffizienten durch die Dichte dividieren. Die relativen Werte hierfür sind am Fuße jeder Tabelle angegeben. Diese Zahlen drücken gleichzeitig den relativen Querschnitt jeder einzelnen Dynamide der verschiedenen Gase aus, wenn wir annehmen, entweder daß sämtliche Dynamiden ein und desselben Gases genau gleich beschaffen wären oder daß die Zahlen bei ungleicher Beschaffenheit auf einen mittleren Querschnitt zu beziehen seien. Nach obigem kann nun ein größerer Querschnitt gedeutet werden als größeres Moment der betreffenden Dynamiden, und es lassen sich deshalb die untersuchten Gase nach der Größe des für sie gefundenen Verhältnisses $\alpha/p:\sigma_i$ in eine Reihe ordnen, die gleichzeitig die Verschiedenheit ihrer Dynamidenmomente zum Ausdruck bringt.

52. Nach diesen Vorstellungen kann es nicht mehr zweifelhaft sein, daß die für die Theorie der dielektrischen Polarisation bis vor kurzem maßgebende Annahme leitender Moleküle in einem absolut nichtleitenden Medium erst verständlich und wirklich berechtigt erscheint durch die Erkenntnis vom Vorhandensein elektrischer Dynamiden und der von mir für jede Molekülsorte nachgewiesenen spezifischen Eigenart derselben. Damit ist aber gleichzeitig erkannt, daß die betreffenden Erscheinungen nicht mehr an die Moleküle als solche, sondern ausschließlich an die in ihnen befindlichen Dynamiden zu knüpfen sind. Da nun im obigen eine Verschiedenheit der einzelnen Gase voneinander sich durch entsprechend verschiedene Dynamidenmomente charakterisiert zeigt, so würde für ein verschiedenes Verhalten der Gase im elektrischen Feld ebenfalls ausschließlich die Größe dieses Momentes maßgebend sein und es wäre — wenn wir uns nun ein Dielektrikum vor-

stellen als elektrische Doppelpunkte im isolierenden Äther — zu erwarten, daß die um 1 verminderte Dielektrizitätskonstante des betreffenden Körpers im gleichen Verhältnis steht zu einer Dichte, wie es für das Absorptionsvermögen der Fall ist.

Wie weit diese Vorstellungen mit der Erfahrung sich vereinigen lassen, zeige die folgende Tabelle, in welcher ich das Verhältnis von Absorptionsvermögen pro 1 mm Druck und Dichte für verschiedene Gase zusammengestellt habe mit dem Quotienten aus der um Eins verminderten Dielektrizitätskonstanten und der Dichte — es sei diese Größe das *dielektrische Moment* genannt — derselben Gase. Einige Dielektrizitätskonstanten — dieselben sind mit ^o) bezeichnet — wurden, da dieselben mir nicht direkt gemessen bekannt sind, aus den Brechungsexponenten für Natriumlicht berechnet, wie es für Gase mit großer Annäherung statthaft ist.

Tabelle XLVII.

Gas	Dichte <i>M</i>	Diel. Konst. <i>D</i>	$\frac{D-1}{M}$	$\frac{\alpha}{p} : M$
Helium	3,96	1,0000724 ^o)	0,0000182	0,000074
Argon	39,88	1,000566 ^o)	0,0000142	0,000084
Sauerstoff . . .	31,76	1,000543 ^o)	0,0000171	0,000096
Luft	28,88	1,000590 ¹⁾	0,0000204	0,000103
Kohlensäure . .	43,67	1,000966 ^{1) 2)}	0,0000221	0,000103
Schweflige Säure	63,59	1,0037 ²⁾	0,0000582	0,000104
Stickstoff . . .	27,86	1,000594 ^o)	0,0000213	0,000106
Äthylen	27,82	1,001312 ¹⁾	0,0000471	0,000126
Ammoniak . . .	16,93	1,000752 ^o)	0,0000444	0,000137
Methan	15,91	1,000948 ^{1) 2)}	0,0000596	0,000148
Wasserstoff . .	2,00	1,000264 ¹⁾	0,000132	0,000178

Man ersieht, daß qualitativ die Reihe der nach $(D-1)/M$ geordneten Gase nahezu übereinstimmt mit der nach $\alpha/p : M$ geordneten. Zwar scheinen vereinzelte Ausnahmen zu bestehen,

1) L. Boltzmann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 69. p. 795. 1874; Pogg. Ann. 155. p. 403. 1875.

2) J. Klemenčič, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 91. p. 712. 1885.

3) W. E. Ayrton u. J. Perry, Transact. of Asiat. Soc. of Jap. 5. p. 116. 1876—77.

indem sich die Reihenfolge von Ammonik und Äthylen in den zwei Fällen umkehrt, und schweflige Säure gänzlich der Übereinstimmung sich entzieht. Der Grund hierfür dürfte am ehesten in einer nicht ganz exakten Bestimmung der einen oder anderen der betreffenden Zahlenwerte zu suchen sein; besonders stimmt die Vermutung, daß der für die Dielektrizitätskonstante der schwefligen Säure gegebene Wert wenig wahrscheinlich ist¹⁾, mit Vermutungen von anderer Seite²⁾ überein.

53. Von besonderer Wichtigkeit muß es sein, die im vorhergehenden gefundene Querschnittsumme aller in der Raumeinheit befindlichen Dynamiden zu vergleichen mit der aus der kinetischen Gastheorie bekannten Querschnittsumme der im gleichen Raum enthaltenen Molekülsphären, wenn unter der Sphäre eines Moleküls derjenige kleinste Raum verstanden ist, den ein Molekül für sich beansprucht, in den also kein anderes einzudringen vermag. Dividieren wir die bekannten Werte jeweils durch die Dichte des betreffenden Gases, so stellt die erhaltene Größe die auf die Masseneinheit reduzierte molekulare Querschnittsumme dar, wir wollen sie als „gaskinetische Querschnittsumme“ bezeichnen. Ihre Bedeutung wird unmittelbar klar, wenn wir uns der neuen Vorstellung von der Zusammengesetztheit aller Moleküle aus einer ihrem Gewicht proportionalen Zahl von Dynamiden mit freien Zwischenräumen zuwenden, indem sich dann ergibt, daß die besprochene Querschnittsumme denjenigen Raum in einem Molekül bezeichnet, der in den einzelnen Gasen jeweils einer gleichen Zahl von Dynamiden zur Verfügung steht. Es ist naheliegend, anzunehmen, daß dieser Raum abhängig sein werde von dem Eigenraum der Dynamiden, dessen Größe uns relativ gegeben ist durch die experimentell ermittelte „absorbierende Querschnittsumme“. Eine Zusammenstellung der der kinetischen Gastheorie entnommenen „gaskinetischen Querschnittsumme“ mit der aus Absorptionsbeobachtungen der Kathodenstrahlen von mir abgeleiteten „absorbierenden Querschnittsumme“ gibt

1) Viel wahrscheinlicher dürfte der Wert 1,0013 sein, wie er sich aus meinen Absorptionsmessungen ableiten ließe.

2) E. Dorn, Wied. Ann. 13. p. 378. 1881; O. E. Meyer, Kinet. Gastheorie 1899. p. 332.

danach sowohl den tatsächlichen Flächenraum an, der einer bestimmten — und für alle Gase gleichgroßen — Zahl von Dynamiden in jedem Molekül zur Verfügung steht, als auch den für den Durchgang schneller Kathodenstrahlen maßgebenden Flächenraum des wirksamen elektrischen Dynamidenfeldes. Das Verhältnis beider Größen erscheint geeignet, die Berechnung des gezeichneten Bildes zu prüfen. Dazu diene die folgende Tabelle, in welcher sich sowohl die Absorptionskonstante wie auch die molekulare Querschnittsumme, die letztere nach den exakten Bestimmungen der Reibungskonstanten von Hrn. Markowski¹⁾, Schultze²⁾, und in einigen Fällen von Graham³⁾ berechnet, auf den normalen Gasdruck von 760 mm beziehen.

Tabelle XLVIII.

Gas	Q pro 760 mm	$\frac{Q}{M}$	$\frac{\alpha}{p} : M$ pro 760 mm
	cm ² /cm ³	cm ² /cm ³	cm ² /cm ³
Helium	6203	1566,4	0,0562
Argon	17680	448,3	0,0698
Sauerstoff	17335	545,8	0,0729
Luft	18415	637,6	0,0783
Kohlensäure	27200	622,8	0,0783
Schweflige Säure	38440	604,5	0,0790
Stickstoff	18610	667,9	0,0805
Äthylen	33360	1199,1	0,0957
Ammoniak	25260	1492,0	0,1041
Methan	22666	1424,6	0,1125
Wasserstoff	9661	4830,5	0,1353

Im allgemeinen zeigt sich die Vermutung bestätigt, daß der Ausdruck Q/M mit demjenigen von $\alpha/p : M$ wächst, daß also der einer bestimmten Dynamidenzahl zur Verfügung stehende Raum im Molekül um so größer ist, je größer der Dynamidenquerschnitt selbst ist. Dabei ist zunächst auffallend, daß das Verhältnis der absoluten Werte beider Größen ein

- 1) H. Markowski, Ann. d. Phys. 14. p. 742. 1904.
- 2) H. Schultze, Ann. d. Phys. 5. p. 140. 1901; 6. p. 302. 1901.
- 3) J. C. Graham, Phil. Trans. Lond. p. 579. 1846; p. 349. 1849.

sehr großes ist, Q/M erscheint noch nahezu 10000 mal größer als $\alpha:M$. Es bedarf hierzu der Bemerkung, daß die Zahlen der letzten Kolumne sich auf Strahlen von sehr großer Geschwindigkeit beziehen, und daß dieselben deshalb nur die Größe desjenigen Kraftfeldes zum Ausdruck bringen, das stark genug ist, Quanten von so großer Geschwindigkeit festzuhalten. Mit dem Übergang zu kleineren Strahlgeschwindigkeiten würden die Werte, wie Hr. Lenard¹⁾ gezeigt hat, rasch anwachsen und schließlich den in der vorletzten Kolumne gegebenen Zahlen als Grenzwerten sich nähern. Wenn schon für die großen Strahlgeschwindigkeiten eine nahe Parallelität beider Kolumnen besteht, so folgt daraus die neue Tatsache, daß dieses Anwachsen der Dynamidensphären für alle Gase in nahezu dem gleichen Verhältnis stattfinden muß.

Eine bedeutende Abweichung vom Gesetz der Parallelität der beiden Querschnittsummen zeigt Helium. Es ist dies wohl auf eine abnorme Größe der zwischen den Dynamiden des Heliums liegenden leeren Räume zurückzuführen, so daß der verfügbare Raum einer Dynamide trotz des kleinen Dynamidenmomentes, wie es sich auch durch den Wert der Dielektrizitätskonstanten bestätigen ließ, ein relativ sehr großer ist. Falls die der Berechnung von Q zugrunde gelegten Werte als richtig betrachtet werden, wäre die einfachste Vorstellung wohl die, daß das Heliumatom relativ sehr große leere Räume enthält, in denen nur wenige Dynamiden mit kleinen Momenten sich finden.

54. Fassen wir die besprochenen Resultate zusammen, so ergibt sich das in der nachstehenden Fig. 6 skizzierte Bild, in welchem als Abszissen die Molekulargewichte der untersuchten Gase und als Ordinaten einmal das Verhältnis α/M^2 , einmal Q/M und schließlich $(D-1)/M$ aufgetragen wurde. Die drei Kurven erlauben somit den direkten Vergleich der drei miteinander im vorstehenden in Beziehung gebrachten Größen und lehren uns, daß im allgemeinen alle drei Faktoren miteinander im selben Sinne sich ändern bei den verschiedenen

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 714. 1903.

2) Die Kurve 1 gibt nunmehr graphisch die Abweichungen vom Massengesetz, welches selbst durch eine zur Abszissenachse parallele Gerade dargestellt wäre.

Gasen. Einige Unregelmäßigkeiten, die sich beim Vergleich der Zahlenwerte der einzelnen Tabellen ergeben haben, scheinen nunmehr noch leichter erklärlich. Abgesehen vom Helium, dessen Abweichung soeben behandelt worden ist, zeigen die Kurven 1 und 2 von Methan zu Ammoniak einen Abfall, die Kurve 3 dagegen einen schwachen Anstieg. Da es sich dabei nur um kleine Differenzen handelt, wird die Vermutung einige

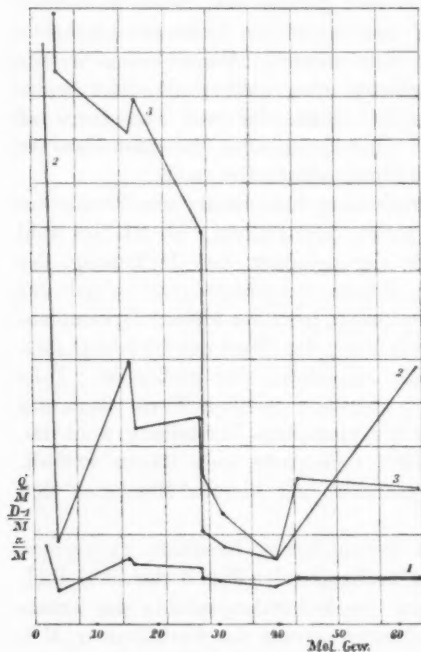


Fig. 6.

Berechtigung finden, daß das Kurvenstück 3 wohl auf nicht ganz exakter Bestimmung der für Q in Betracht kommenden Größen beruht. In ähnlicher Weise ist es wahrscheinlich, daß das Kurvenstück 2 von Ammoniak zu Äthylen auf einer Fehlerquelle bei der Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten beruht. Die schon früher ausgesprochene Vermutung für SO_2 scheint sich auch durch die gute Übereinstimmung der Kurven 1 und 3 zu bestätigen.

Auffallend ist, daß die Teile der beiden Kurven 1 und 3 an-

fänglich weit auseinander liegen und erst nach größeren Dichten zu mehr und mehr sich der Parallelität nähern. Da die für die Absorption der 6 Voltstrahlen von Hrn. Lenard¹⁾ erhaltenen Resultate gerade das entgegengesetzte Verhalten zeigen, müssen wir schließen, daß die Zunahme der absorbieren-

1) P. Lenard, l. c. p. 741. 1903.

den Querschnitte mit kleiner werdender Strahlgeschwindigkeit um so rascher wächst, je kleiner das Molekulargewicht des betreffenden Gases ist.

Es kann danach allgemein behauptet werden, daß die Vermutungen, die zuerst von Hrn. Lenard ausgesprochen und von ihm für Wasserstoff direkt als zutreffend bewiesen wurden, sich bei allen untersuchten Gasen bestätigen, wonach die Abweichung der Absorptionskoeffizienten vom Massenproportionalitätsgesetz als eine notwendige Forderung der Tatsache anzusehen ist, daß bei der Annahme einer Zusammengesetztheit aller Atome der Materie aus gleichartigen Grundbestandteilen — Dynamiden — die Unterscheidungsmerkmale in kleinen spezifischen Verschiedenheiten dieser Bestandteile zu suchen sind. Als eine solche Verschiedenheit ist die Variabilität der Dynamidenmomente zu betrachten. Die Größe oder der Querschnitt eines Moleküls zeigt sich nach unseren gewonnenen Erfahrungen abhängig vom Querschnitt seiner Dynamiden oder von der Größe des elektrischen Kraftfeldes derselben, und diese Dynamiden sind es auch, welche das Verhalten der Moleküle im elektrischen Felde bedingen.

55. Es drängt sich jetzt die Frage auf, ob spezifische Verschiedenheiten ausschließlich in einem verschiedenen Moment der Dynamiden begründet wären oder ob noch andere Faktoren hier in Betracht kämen. Es bedeutet ein näheres Eingehen auf diese Frage, wenn wir versuchen, an der Hand der gewonnenen Erkenntnis das Gebiet der verschiedenartigen physikalischen und chemischen Erscheinungen zu betreten, um zu untersuchen, ob auch für diese ausschließlich die Größe der nun bekannten Dynamidenkraftfelder maßgebend sei. Dabei fällt auf, daß gerade diejenigen Elemente, welche chemisch wenig aktiv sind, wie z. B. die beiden einatomigen Gase Argon und Helium, in ähnlicher Weise das Gold, relativ sehr kleine Dynamidenmomente besitzen, während der stark aktive Wasserstoff sich durch ein sehr großes Kraftfeld auszeichnet. Die Unfähigkeit der beiden erstgenannten Gase, Atome anderer Elemente an sich zu binden, scheint soweit gesteigert, daß sie selbst ihre eigenen Atome nicht merklich anziehen und infolgedessen keine Neigung zeigen zur Bildung zweiatomiger Moleküle, und ebenso scheint es verständlich, daß die Verflüssigung

von Helium deshalb so große Schwierigkeit bietet, weil zu den kleinen Kraftfeldern desselben noch ihr gegenseitiger großer Abstand kommt.

Wenn danach anzunehmen ist, daß auch die sogenannten chemischen Kräfte, welche die Atome verschiedener Materie aufeinander ausüben, zum Teil wenigstens von der Größe ihrer elektrischen Kraftfelder herrühren, so bietet die Ausdehnung dieser Vorstellung auf einen weiteren Kreis in Betracht kommenden Erscheinungen doch einige Schwierigkeit, die vielleicht eher einer einfachen Lösung entgegensehen kann, wenn einmal weitere wichtige Elemente in den Kreis der Untersuchung gezogen sind. Sehr verständlich erscheint der Versuch, die chemische Wirkung zweier Atome aufeinander in erster Linie auf entgegengesetzte Ladungen derselben zurückzuführen, die sich im Innern eines Gases infolge sekundärer Strahlung ausbilden könnten. Damit dürfte sich beispielsweise die Ozonbildung in von Kathodenstrahlen durchsetzter Luft und Ähnliches ungezwungen erklären, und es dürfte dann die Größe der „chemischen Affinität“ physikalisch fixiert sein durch die Zahl der von einem Atom abgespaltenen oder aufgenommenen negativen Quanten, welche abhängen wird 1. von der Art und Intensität der auslösenden Ursachen, 2. von der Zahl vorhandener Dynamiden, d. h. vom Molekulargewicht — diese Forderung dürfte der Gesetzmäßigkeit des periodischen Systems gerecht werden —, 3. von der spezifischen Fähigkeit der Atome, negative Quanten festzuhalten oder loszulassen — diese scheint in erster Linie eine Funktion der Kraftfelder der Dynamiden zu sein. Schließlich ist wohl Wert zu legen auf eine verschiedene Gruppierung der Dynamiden im Atom, wie die Beobachtungen der Lichtemission sie nahelegen.

Zum Schlusse erfülle ich die angenehme Pflicht, Hrn. Prof. Dr. Lenard, auf dessen Anregung hin die Untersuchungen begonnen wurden, meinen herzlichsten Dank zu sagen für das große Interesse, das er jederzeit dieser Arbeit entgegenbrachte.

Kiel, den 9. April 1905.

(Eingegangen 12. April 1905.)

2. Zur Theorie der Kapillarschicht; von G. Bakker.

§ 1. Kriterien für das Gleichgewicht einer Flüssigkeit bez. nach Gauss (1830) und nach Gibbs (1876).

Die Theorie der Kapillarität von Laplace, die wir zu den schönsten Errungenschaften der Wissenschaft rechnen können, welche wir dem großen Mathematiker verdanken, ist durch Gauss auf meisterhafte Weise vervollständigt worden. Die Laplacesche Theorie kann in der Hauptsache durch zwei Sätze ausgedrückt werden:

I. *Auf ein Element der Flüssigkeitsoberfläche wird infolge der kapillaren Kräfte ein Druck ausgeübt, der auf das Flächenelement senkrecht steht und dessen Größe (auf die Flächeneinheit bezogen) gleich*

$$(1) \quad K \pm \frac{H}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

ist. Hier sind H und K Konstanten, welche nur von der Natur der Flüssigkeit abhängen. R_1 und R_2 sind die beiden Hauptkrümmungsradien an der Stelle des Flächenelementes. In der Formel ist das obere Zeichen anzuwenden, wenn die Oberfläche nach außen konvex ist, das untere, wenn sie nach außen konkav ist.

II. *Dieselbe Flüssigkeit schneidet dieselbe feste Substanz stets unter gleichem Winkel.* Dieser Winkel ist also von der Gestalt der Oberfläche unabhängig.

Von den erwähnten beiden Sätzen ist es Laplace in diesen nur gelungen, den ersten befriedigend zu begründen. Den zweiten hat er lediglich für eine besondere Form des Gefäßes abgeleitet, während der Satz in Wirklichkeit auch für beliebige Grenzflächen gilt. Somit enthält die Laplacesche Theorie eine wesentliche Lücke, durch die Gauss veranlaßt wurde, eine strengere Begründung der Theorie zu ersinnen. Diese strengere Gauss'sche Theorie, die zu derselben Differentialgleichung für die Oberfläche führt, gibt aber zugleich die Allgemeingültigkeit des zweiten Satzes.

Die Gauss'sche Theorie geht bekanntlich von dem allgemeinen mechanischen Prinzip der virtuellen Verschiebungen von Joh. Bernouilli¹⁾ aus, und kann auf folgende Weise ausgesprochen werden:

An den Punkten α, β, γ etc. mögen die Kräfte P, Q, R etc. angreifen. Wir erteilen den Punkten irgendwelche unendlich kleine, mit der Natur der Verbindungen verträgliche umkehrbare Verschiebungen und bilden von denselben die Projektionen $\delta p, \delta q, \delta r$ etc. auf die Richtungen der Kräfte. Diese Projektionen betrachten wir als positiv, wenn sie in die Richtung der Kraft fallen, als negativ, wenn sie in die entgegengesetzte Richtung fallen. Die Produkte $P\delta p, Q\delta q, R\delta r, \dots$ heißen virtuelle Momente und haben in den beiden eben erwähnten Fällen ein entgegengesetztes Zeichen. Das Prinzip sagt nun, daß für den Fall des Gleichgewichtes:

$$(2a) \quad P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots = 0.$$

Haben die betrachteten Kräfte alle eine Kräftefunktion und ist W die gesamte potentielle Energie, so wird die Gleichung:

$$(2b) \quad \delta W = 0.$$

Gauss setzt ebenso wie Laplace eine Potentialfunktion für die Kräfte zwischen den Flüssigkeitselementen voraus und findet bei Voraussetzung einer konstanten Densität ϱ nach Vernachlässigung des Teiles der potentiellen Energie, welche nur von der gegenseitigen Lagerung der Oberflächenelemente abhängt, für den Ausdruck der potentiellen Energie einer Flüssigkeit auf sich selbst:

$$(3) \quad a\varrho^2 v + Hs,$$

wo a und H Konstanten, v das Gesamtvolumen und s die Größe der Flüssigkeitsoberfläche darstellen. Der Ausdruck (3) soll nun so variiert werden, daß v keiner Änderung unterliegt. Steht also die Flüssigkeit unter einem äußeren Druck p , aber

1) Die Gültigkeit dieses Prinzipes wurde zuerst von Stevin zu Ende des 16. Jahrhunderts bei Untersuchung des Gleichgewichtes der Rollen und Rollensysteme bemerkt: „Ut spatium agentis ad spatium patientis, sic patientis ad potentiam agentis“ (E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung).

ohne Einfluß anderer äußerer Kräfte, so ist das virtuelle Moment von p Null und (3) gibt:

$$\delta(Hs) = H\delta s = 0 \quad \text{oder} \quad \delta s = 0,$$

und wir erhalten für die Oberfläche der Flüssigkeit die Kugel-
form ($\delta v = 0$ weil ϱ als eine Konstante betrachtet wird).

Hat man einen Flüssigkeitstropfen auf einer horizontalen Ebene, ist $d\tau$ ein Volumelement, z seine Höhe oberhalb dieser Ebene, während als äußere Kraft nur die Schwere betrachtet wird, so wird die Bedingung für das Gleichgewicht:

$$(4) \quad \delta \left\{ Hs + \varrho g \int z d\tau \right\} = 0.$$

Wenn ds ein Element der freien Flüssigkeitsoberfläche und δn ein Differential der äußeren Normalen darstellt, während r und r' die Hauptkrümmungsradien im betrachteten Punkt bedeuten, so ist:

$$\delta \int z d\tau = \int z \delta n ds$$

und

$$\delta s = \int \delta ds = \int \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \delta n ds.$$

Gleichung (4) wird also:

$$g\varrho \int z \delta n ds + H \int \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \delta n ds = 0,$$

und da δn für Punkte der freien Flüssigkeitsoberfläche *umkehrbar* ist:

$$(5a) \quad g\varrho z + H \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right\} = \text{Konstante.}$$

H ist die Laplacesche Konstante oder die Arbeit, um die Flüssigkeitsoberfläche um eine Einheit zu vergrößern. Da nun der hydrostatische Druck nur um eine Konstante mit $-g\varrho z$ differiert, so gibt (5)

$$(5b) \quad \text{Druck} = \text{Konstante} + H \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right\}.$$

Gleichung (5) drückt also im wesentlichen den ersten Laplace-
schen Satz aus. Es ist aber nicht überflüssig, zu bemerken,
daß Laplace in seiner Gleichung (1) unter dem Druck etwas
anderes verstand als den hydrostatischen. Denn der Molekular-
druck K von Laplace ist kein hydrostatischer Druck, sondern

das, was wir heute die Kohäsion oder den inneren Druck nennen, und wenn wir der Kapillarschicht Dicke zuschreiben, so müssen die betrachteten Punkte, wofür (5) aufgestellt ist, unmittelbar an der *inneren* Seite der Kapillarschicht gewählt werden. Da aber die Differenz zwischen thermischem Druck und Kohäsion den hydrostatischen Druck gibt und in den Theorien von Laplace und Gauss die Dichte *und deshalb auch der thermische Druck* als eine Konstante betrachtet werden muß, erhält man durch Subtraktion des thermischen Druckes aus (1) unmittelbar (5 b).

Für die Ableitung des zweiten Laplaceschen Satzes aus der Gauss'schen Theorie vgl. man weiter: F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Kapillarität. Herausgegeben von Dr. A. Wangerin. Leipzig, B. G. Teubner. Dieser Satz kann übrigens als ein besonderer Fall des Satzes betrachtet werden, welcher die Abhängigkeit der Kantenwinkel von drei zusammenstoßenden Flüssigkeiten gibt und welcher sehr einfach durch die Theorie der Oberflächenspannung erklärt werden kann (Thomas Young (1803) und weitere Bearbeitungen von Plateau und van der Mensbrugghe).

Der erste sowohl als der zweite Satz von Laplace wird durch die Beobachtungen bestätigt und die Gauss'sche Theorie ist deshalb genügend, um die gewöhnlichen Kapillarerscheinungen zu erklären. *Doch wissen wir, daß die Betrachtungen von Laplace und Gauss unvollständig sind in dreierlei Sinn.* Erstens wirken zwischen den Flüssigkeitselementen nicht nur die Volumkräfte, sondern zwischen einander berührenden Elementen auch der thermische Druck¹⁾; an zweiter Stelle ist nicht die *potentielle Energie* der Volumkräfte, sondern *die freie Energie*, wie Gibbs gezeigt hat, maßgebend für das Gleichgewicht, und endlich setzen Laplace und Gauss voraus, daß die Densität durch die ganze Masse der Flüssigkeit dieselbe ist. Die Erscheinungen der Kapillarität lehren aber, daß die Kohäsionskräfte und der thermische Druck verschiedener Natur sein müssen. Während n. l. der thermische Druck sich als eine Kontaktkraft äußert, hat die Kohäsion einen Raum²⁾ als

1) G. Bakker, Zeitschr. f. phys. Chem. 14. p. 3. 1894.

2) G. Bakker, l. c. und 33. p. 4. 1900.

Wirkungsfeld und kann nur als ein Flächendruck *berechnet* werden. Der thermische Druck, welcher nur abhängt von der Beschaffenheit der Flüssigkeit im betrachteten „Punkt“, ist (bei bestimmter Temperatur) nur von der Densität in diesem Punkt abhängig. *Ist also die Densität der Flüssigkeit bis zur Oberfläche konstant, so ist es auch der thermische Druck.* Die gewöhnlichen wohl bekannten Betrachtungen über die Anziehungskräfte auf einen Massepunkt in der Flüssigkeit in der Nähe ihrer Oberfläche lehren, daß bei Voraussetzung einer konstanten Densität die Kraftintensität der Kohäsion *zunimmt* vom Inneren der Flüssigkeit nach der Oberfläche hin. Da nun die Differenz zwischen thermischem Druck und Kohäsion dem äußeren Druck gleich sein muß¹⁾, so sieht man also leicht ein, daß *die Flüssigkeitsdensität nicht konstant sein kann bis zu ihrer Oberfläche.* Die Dichte der Flüssigkeit muß deshalb in der Nähe der Oberfläche, welche wir als eben betrachten wollen, einer Änderung unterliegen. Denken wir erstens, daß die Dichte vom Innern nach der Oberfläche hin *zunimmt* und daß also die Oberfläche scharf begrenzt ist, so würde, da alle Flüssigkeiten verdampfen, das Kräftefeld der Molekularkräfte unmittelbar eine Quantität Dampf auf die Flüssigkeitsoberfläche niederschlagen, und die Dichte würde in der Übergangsschicht zwischen homogener Flüssigkeit und homogenem Dampf ein Maximum zeigen. Solch ein Gleichgewicht ist aber aus folgenden Gründen sehr unwahrscheinlich. Betrachten wir n. l. ein Säulchen in der Übergangsschicht mit einer Höhe dh senkrecht auf der Oberfläche der Schicht und mit einem Durchschnitt Eins. Setzen wir dh positiv voraus in einer Richtung von der Flüssigkeit nach dem Dampf hin, so wirkt auf die Grundfläche (nach der Flüssigkeit gekehrt) in der Richtung Flüssigkeit-Dampf der thermische Druck θ und auf die gegenüberliegende Seite der Druck:

$$-\left(\theta + \frac{d\theta}{dh} dh\right),$$

während die Kohäsionskräfte eine Resultante

$$-\rho \frac{dV}{dh} dh \quad (V = \text{Potential der Anziehungskräfte})$$

1) Die Änderungen der Densität durch die Wirkung der Schwere sind hier unwesentlich.

liefern (in der positiven Richtung von dh). Das Gleichgewicht macht also die Bedingung:

$$(6) \quad \theta - \theta - \frac{d\theta}{dh} dh - \rho \frac{dV}{dh} dh = 0 \quad \text{oder} \quad d\theta = -\rho dV.$$

notwendig. Zwischen dem thermischen Druck und dem Potential der Anziehungskräfte der Volumelemente erhalten wir also dieselbe Beziehung wie in der Hydrostatik zwischen dem Potential der äußeren Kräfte und dem hydrostatischen Druck. Hätten wir auch äußere Kräfte betrachtet, und wäre das Potential dieser Kräfte durch V_1 dargestellt, so würde man erhalten haben:

$$(6a) \quad d\theta = -\rho dV - \rho dV_1.$$

Da θ nur von der Dichte im betrachteten Punkt abhängen soll, können wir diese Größe betrachten als den thermischen Druck in einer homogenen Phase, deren Dichte der Dichte im betrachteten Punkt gleich ist. Deshalb:

$$\theta = p + a\rho^2,$$

wenn p der Druck wäre in einer solchen homogenen Phase bei derselben Temperatur, wie sie in Wirklichkeit in dem betrachteten Raum besteht; $a\rho^2$ ist der Molekulardruck von Laplace oder die Kohäsion in der homogenen Phase ρ .

Durch Differentiation:

$$d\theta = dp + 2a\rho d\rho$$

und Substitution in (6):

$$dp + 2a\rho d\rho = -\rho dV$$

oder:

$$(7) \quad v dp + 2a d\rho = -dV.$$

Ist μ das thermodynamische Potential für die betrachtete Phase und μ_1 ihr Wert für die Flüssigkeit¹⁾, so erhalten wir durch Integration von Gleichung (7):

$$(8) \quad \mu - \mu_1 + 2a(\rho - \rho_1) = -(V - V_1).$$

Die Größe a ist der Koeffizient des Laplaceschen Ausdrucks für den Molekulardruck (welcher hier als Kohäsion aufgefaßt worden ist), und Gauss hat gezeigt, daß das Potential

1) Also auch in den Dampf.

der potentiellen Energie einer homogenen Phase (abgesehen von ihrer Oberflächenenergie) durch

$$V = -2 a \varrho$$

ausgedrückt wird, wo nun a wieder derselbe Koeffizient ist wie in dem Laplaceschen Ausdruck $a \varrho^3$ für die Kohäsion.¹⁾ Für die Flüssigkeit haben wir also:

$$V_1 = -2 a \varrho_1,$$

und die Gleichung (8) wird:

$$(9) \quad V + 2 a \varrho = \mu_1 - \mu.$$

Nun findet man mit Hilfe der Taylorschen Reihe (Maxwell, Rayleigh, van der Waals) für eine ebene Kapillarschicht für das Potential in einem Punkt ihrer Masse:

$$V = -2 a \varrho - \frac{2 c_2}{1.2} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} - \frac{2 c_4}{1.2.3.4} \frac{d^4 \varrho}{dh^4} - ,$$

wo c_2, c_4 Koeffizienten sind, die von der Kräftefunktion der Volumkräfte abhängen, also:

$$\mu - \mu_1 = \frac{2 c_2}{1.2} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} + \frac{2 c_4}{1.2.3.4} \frac{d^4 \varrho}{dh^4} + \dots ,$$

oder durch Integration über die Dicke der Kapillarschicht:

$$(10a) \quad \int_1^2 \mu dh = \mu_1 h \quad \text{oder} \quad \frac{1}{h} \int_1^2 \mu dh = \mu_1 ,$$

wenn h die Dicke der Kapillarschicht bedeutet, deshalb: *der Mittelwert des thermodynamischen Potentials (der homogenen Phasen²⁾) in der Kapillarschicht ist dem Wert des thermodynamischen Potentials in der homogenen flüssigen und dampfförmigen Phase gleich.* Weiter folgt aus Gleichung (9) im Zusammenhang mit (10):

$$\int_1^2 V dh = -2 a \int_1^2 \varrho dh = -2 a m ,$$

wenn m die Masse der Kapillarschicht pro Einheit ihrer Ober-

1) In seiner „Kontinuität etc.“ hat van der Waals diese Beziehung besonders einfach hervortreten lassen (I. p. 31).

2) Bei jedem Punkte der Kapillarschicht denke man sich eine homogene Phase, deren Dichte der Dichte im betrachteten Punkt gleich ist.

fläche darstellt. Ist $\bar{\rho}$ die mittlere Dichte oder $m = \bar{\rho} h$, so findet man noch

$$(10b) \quad \frac{1}{h} \int_1^2 V dh = -2 a \bar{\rho},$$

oder der Mittelwert des Potentials der Anziehungskräfte von Laplace wird für die Kapillarschicht auf dieselbe Weise aus dem Mittelwert der Dichte berechnet, wie für eine homogene Phase das Potential aus der Dichte.

Hätte also die Densität in der Kapillarschicht ein Maximum ohne Minimum, so würde die Gleichung (10a) schwer verständlich sein.

Aus obigen Betrachtungen schließen wir deshalb:

1. daß die Dichte einer Flüssigkeit sich in der Nähe ihrer Oberfläche ändert,

2. daß die Dichte durch die Übergangsschicht hin stetig abnimmt bis die Dampfdichte erreicht ist. Poisson hat schon die Theorien von Laplace und Gauss in dieser Richtung vervollständigt, bemerkt aber *irrigerweise*, daß ohne diese Densitätsänderung die Kapillaritätserscheinungen nicht zustande kämen. Hierauf hat J. Stahl¹⁾ hingewiesen und aus meinen Betrachtungen in früheren Arbeiten²⁾ folgt, daß die Kapillarkonstante von Laplace allerdings eine Differenz zwischen den Kohäsionen *in* der Richtung bez. *senkrecht auf* die Richtung der Oberflächenschicht fordert, aber hierbei ist nicht *unbedingt* eine *stetige* Änderung der Dichte erforderlich. Die Frage, ob eine konstante Dichte bis zur Oberfläche der Flüssigkeit eine Differenz zwischen den Kohäsionen *in* der Richtung bez. *senkrecht auf* die Richtung der Oberfläche zur Folge hat (und deshalb eine Kapillarspannung), bietet aber nur mathematisches Interesse, denn aus obigen Betrachtungen geht genügend hervor, daß der Übergang ein stetiger sein muß, wobei die Dichte abnimmt vom Inneren der Flüssigkeit nach der Oberfläche hin. (Die Dicke dieser Übergangsschicht habe ich berechnet³⁾ und Werte erhalten, welche in Übereinstimmung sind mit den

1) J. Stahl, Pogg. Ann. 139. 1870.

2) G. Bakker, Ann. d. Phys. 14. p. 612. 1904.

3) G. Bakker, Zeitschr. f. phys. Chem. 51. p. 359 u. 361. 1905.

bekannten Messungen von Quincke, Reinold und Rücker und Vincent).

Ich kann denn auch Weiler nicht beistimmen, wenn er in seinem Physikbuch 2. Teil, p. 35 sagt:

„Das Flüssigkeitshäutchen entsteht, weil die Moleküle an der Oberflächenschicht stärker zueinander hingezogen und deshalb mehr verdichtet werden als an tiefer gelegenen Stellen, wo sich die Anziehungen gegenseitig teilweise aufheben.“ Es sei mir gestattet, zu bemerken, daß im Mittelpunkt einer Wasserkugel von der Größenordnung der Erde die Anziehungen sich auch gegenseitig aufheben und die Intensität des Kräftefeldes der Gravitation im Mittelpunkt Null ist; aber wir schließen hieraus nicht, daß die Dichte der Wasserkugel für diesen Punkt kleiner ist als an der Oberfläche, denn die Größenordnung des *Druckes* wird im Mittelpunkt gegeben durch die Formel:

$$p = \frac{3}{8\pi f} g_0^2 \text{)},$$

wo g_0 die Beschleunigung der Schwere an der *Oberfläche* der Wasserkugel und f die Gravitationskonstante bedeutet. Da f sehr klein ist, würde für eine Wasserkugel von der Größe unserer Erde der innere Druck im Mittelpunkt sehr groß ausfallen. Die Analogie des Kräftesystems der Volumkräfte eines sehr kleinen Tropfens mit dem der gravitierenden Wasserkugel ist vielleicht die einfachste Weise, um unmittelbar einzusehen, daß die Dichte in der Kapillarschicht nach der Oberfläche hin *abnimmt*; denn die Analogie ist nicht scheinbar. Die Kapillarwirkungen können n. l. sehr gut erklärt werden durch Volumkräfte gleicher Art wie die gravitierenden Newtonschen Kräfte. Die Newtonschen Kräfte machen übrigens schon theoretisch das wirkliche Bestehen von einer Attraktions-sphäre unmöglich. Daß die Berechnungen sich durch Einführung einer solchen Sphäre erleichtern, ist eine andere Sache und sagt weiter nichts, als daß die Kräfte der Molekeln in der nächsten Nähe des betrachteten Masseteilchens *maßgebend*

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 13. p. 564. 1904. Wenn die Dichte der Kugel als eine Konstante betrachtet würde, so wäre die Formel für p exakt.

sind, d. h. die Erscheinungen der Kapillarität sind praktisch unabhängig von der totalen Quantität der betrachteten Massen.

Wie ich bemerkte, sind die Theorien von Gauss und Laplace unvollständig in *dreierlei* Richtung. Ausgenommen, daß sie die Dichte der Flüssigkeit als eine Konstante voraussetzen, betrachten sie nicht die *zwei* Kräfte *verschiedener* Natur, welche in der Flüssigkeit wirken, sondern nur eine: die Volumkraft der Kohäsion. Weiter, wie schon bemerkt worden ist, ist nicht die *potentielle Energie* der Volumkräfte, sondern die *freie Energie* maßgebend für das Gleichgewicht. Woher kommt es nun, daß die Gauss'sche Theorie ebensogut wie die Anwendung des Gibbs'schen Prinzips den ersten und zweiten Laplaceschen Satz gleich gut erklären? Sehr einfach; potentielle Energie sowohl als freie Energie nehmen beide bei Vergrößerung (isothermisch) der Oberfläche der Flüssigkeit dieser Vergrößerung proportional zu, und der Ausdruck für den Wert der Größe, welche ein Minimum werden soll, wird in beiden Fällen durch Formel (3) ausgedrückt. *Die mathematische Seite des Problems bleibt deshalb unberührt.* Nur H hat eine andere Bedeutung erhalten und die Kapillaritätskonstante von Laplace muß als die Zunahme der *freien Energie* betrachtet werden,

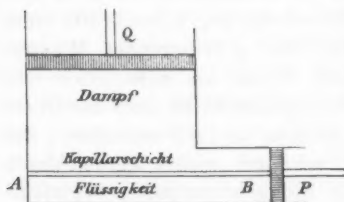


Fig. 1.

wenn die Oberfläche der Flüssigkeit um eine Einheit vergrößert wird. Das können wir auch einfach analytisch zeigen. In einem Gefäß befinde sich Flüssigkeit in Berührung mit ihrem (gesättigten) Dampf. Vergrößern wir nun auf umkehrbare Weise durch die Bewegung zweier

Kolben P und Q (Fig. 1) die Berührungsfläche AB ohne das Volum des Gefäßes zu ändern, so wirkt die Kapillarspannung bei B als ein Zug auf den Kolben P und man erhält:

$$(11) \quad T d\eta = d\varepsilon - H ds,$$

wenn ds die Vergrößerung der Berührungsoberfläche darstellt. Jede homogene Phase (Flüssigkeit und Dampf) hat eine Quantität Materie zur Bildung des neuen Teiles der Kapillarschicht

abgegeben. Ist die Berührungsoberfläche AB um eine Einheit vergrößert, so wird $ds = 1$, und schreiben wir für die Zunahme der Energie pro Einheit der Oberflächevergrößerung nach der Gibbsschen Weise ϵ_s etc., so gibt (11) unmittelbar:

$$(12) \quad T\eta_s = \epsilon_s - H \quad \text{oder} \quad H = \epsilon_s - T\eta_s.$$

Daß aber in der Laplace-Gaüssschen Theorie die gebundene Energie keine Rolle spielen könnte, ist sofort klar. Übrigens kommt das auf dasselbe hinaus, daß die Arbeit des thermischen Druckes bei Änderung der Dichte vernachlässigt wird, wie auch aus folgenden Betrachtungen hervorgeht.

Als Bedingung für das Gleichgewicht einer Flüssigkeit haben wir oben Gleichung (6) gefunden. Wir wollen nun zeigen, daß diese Bedingung gleichwertig ist mit dem Kriterium von Gibbs. Betrachten wir dazu die Variation des Volumintegrals:

$$\int \rho \left\{ \int_1 \frac{\theta d\varrho}{\varrho^2} + \frac{1}{2} V \right\} d\tau^1,$$

wo θ der thermische Druck, ρ die Dichte und V das Potential der Laplaceschen Volumkräfte für einen bestimmten Punkt der Flüssigkeit darstellt. Nun ist:

$$\begin{aligned} & \delta \int \rho \left\{ \frac{\theta d\varrho}{\varrho^2} + \frac{1}{2} V \right\} d\tau \\ &= \int \left\{ \delta \rho \left(\int_1 \frac{\theta d\varrho}{\varrho^2} + \frac{1}{2} V \right) + \rho \left(\frac{\theta \delta \varrho}{\varrho^2} + \frac{1}{2} \delta V \right) \right\} d\tau \\ &= \int \left\{ \delta \rho \left(V + \int_1 \frac{\theta d\varrho}{\varrho^2} \right) + \frac{\theta \delta \varrho}{\varrho} \right\} d\tau = \int \left\{ \delta \rho \left(V + \int_1 \frac{\theta d\varrho}{\varrho} \right) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Wird so variiert, daß

$$\delta \int \rho d\tau = 0,$$

so kann man die Variation des obigen Integrales auch auf folgende Weise schreiben:

$$\int \delta \rho \left\{ \int_1 \frac{d\theta}{\varrho} + V - V_1 \right\} d\tau,$$

1) Der Index 1 hat Beziehung auf einen Nullzustand.

wenn V_1 das Potential einer homogenen Nullphase bedeutet. Die Bedingung, daß die Variation Null sein soll, gibt also:

$$\int_1 \frac{d\theta}{\varrho} + V - V_1 = \text{Konst. oder } d\theta = -\varrho dV$$

und das ist Gleichung (6).

Die Bedingungen:

$$(13) \quad \delta \int \varrho \left\{ \int_1 \frac{\theta d\varrho}{\varrho^2} + \frac{1}{2} V \right\} d\tau = 0$$

und

$$(14) \quad \delta \int \varrho d\tau = 0$$

sind zusammen deshalb gleichwertig mit der Gleichung:

$$(15) \quad d\theta = -\varrho dV.$$

Betrachten wir nun isothermische Änderungen der Energie, wie in der Gauss'schen Theorie vorausgesetzt wird, als Änderungen der potentiellen Energie, so kann für eine *homogene Phase* in der Clapeyron-Clausius'schen Gleichung:

$$p = T \left(\frac{\partial \eta}{\partial v} \right)_T - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \right)_T$$

$T(\partial \eta / \partial v)_T$ als der thermische Druck aufgefaßt werden, während $(d\varepsilon/dv)_T$ die Kohäsion (Molekulardruck von Laplace) darstellt. Da aber der thermische Druck nur abhängt von der Dichte im betrachteten Punkt selbst, so kann auch für die *Kapillarschicht*

$$T \left(\frac{\partial \eta}{\partial v} \right)_T = -T\varrho^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varrho} \right)_T$$

als der thermische Druck aufgefaßt werden. Also:

$$\theta = -T\varrho^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varrho} \right)_T$$

oder

$$-T\eta = \int_1 \theta \frac{d\varrho}{\varrho^3}.$$

Die Gibb'sche Bedingung:

$$\delta \int \varrho (\varepsilon - T\eta) d\tau = 0$$

kann deshalb auch wie folgt geschrieben werden:

$$\delta \int \frac{1}{2} V \varrho d\tau + \delta \int \left\{ \varrho \left(\int_1 \frac{\theta d\varrho}{\varrho^2} \right) \right\} d\tau,$$

aber das ist gerade Gleichung (13), welche im Zusammenhang mit Gleichung (14) (die zweite Bedingung von Gibbs) identisch war mit Gleichung

$$(15) \quad d\theta = -\rho dV.$$

Gleichung (15) oder (6) oben hat Bedeutung für jede Richtung und gibt für ein rechtwinkliges Koordinatensystem:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{d\theta}{dx} = -\rho \frac{dV}{dx}, \\ \frac{d\theta}{dy} = -\rho \frac{dV}{dy}, \\ \frac{d\theta}{dz} = -\rho \frac{dV}{dz}. \end{cases}$$

Statt der von Gauss benutzten Bedingung, wonach das *Gesamtvolumen* der Flüssigkeit einen gegebenen Wert besitzt, stellt Neumann¹⁾ sich die Flüssigkeit als ein Aggregat von Massenteilchen vor, die den Raum kontinuierlich erfüllen, und setzt voraus, daß kein Element derselben bei einer Verschiebung sein Volumen ändere. Für jedes Volumenelement gibt die Bedingung für das Gleichgewicht also:

$$\delta(d\tau) = 0.$$

Sind μ unbekannte Faktoren, und ist W die totale potentielle Energie der Flüssigkeit, so erhält Neumann durch Variation des Ausdruckes $W + \sum \mu d\tau$:

$$\frac{d\mu}{dx} + \rho \frac{dV}{dx} = 0,$$

$$\frac{d\mu}{dy} + \rho \frac{dV}{dy} = 0,$$

$$\frac{d\mu}{dz} + \rho \frac{dV}{dz} = 0,$$

wenn wieder V das Potential der Volumkräfte bedeutet. Man sieht also, daß die Größe μ von Neumann den thermischen Druck darstellt; denn oben fanden wir, wenn V das Potential der inneren und V_1 das Potential der äußeren Kräfte darstellt, allgemein:

$$d\theta = \rho dV - \rho dV_1 \quad (\text{Gleichung (6a)}),$$

1) F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Kapillarität p. 212ff. B. G. Teubner. Leipzig 1894.

und Neumann nimmt die beiden Potentiale zusammen. Irrigerweise hat er aber μ als den *hydrostatischen* Druckedeutet.

Die Differenz zwischen der Gauss'schen Theorie einerseits und der Gibbs'schen Theorie andererseits besteht also darin, daß die erstere Entropie und thermischen Druck nicht berücksichtigt, während die Theorie von Gibbs, welche die freie Energie als maßgebend für das Gleichgewicht betrachtet, die Entropie als Unterteil der freien Energie einführt. Wie oben bemerkt ist, kann nun wieder die gebundene Energie $T\eta$ betrachtet werden als das Integral des thermischen Druckes:

$$-T\eta = \int_1 \theta \frac{d\theta}{\theta^2} \quad \text{oder} \quad T\eta = \int_1 \theta dv.$$

Die Theorie von Neumann steht gewissermaßen zwischen der Theorie von Laplace-Gauss einerseits und der Theorie von Gibbs andererseits.

§ 2. Formel für die Kapillaritätskonstante.

Wenn H die Kapillaritätskonstante von Laplace, ρ_1 die Dichte der Flüssigkeit und ρ_2 die Dichte des Dampfes darstellt, so ist bekanntlich die Steighöhe der Flüssigkeit in einer Kapillare in einem Raum, der nur Flüssigkeit und Dampf enthält, dem Ausdruck:

$$\frac{H}{\rho_1 - \rho_2}$$

proportional. Andererseits ändert sich diese Steighöhe der Abnahme der Temperatur proportional. (Ausgenommen für Temperaturen in der unmittelbaren Nähe der kritischen Temperatur.) So fand z. B. Verschaffelt¹⁾ für die Steighöhe von CO_2 in einer Kapillare, welche einen Radius von 0,0441 mm hatte:

$$(17) \quad \S = 26,04 - 0,825 t.$$

Nun ist:

$$\frac{26,04}{0,825} = 31,5.$$

Setzen wir also nach van der Waals $T/T_x = m$, so erhalten wir:

$$\S = \alpha(1 - m).$$

1) J. E. Verschaffelt, Abhandlungen der Kon. Ak. v. Wetensch. Amsterdam 1896/97. p. 94—103; Comm. from the Lab. of Phys. Leiden, Nr. 28. 15 pp.

Wenn κ also eine Konstante bedeutet, so haben wir auch:

$$\frac{H}{\varrho_1 - \varrho_2} = \kappa(1 - m).$$

Es ist sehr wahrscheinlich, daß diese Beziehung bis zu der kritischen Temperatur erfüllt ist, denn die Theorie der Kapillarität von van der Waals, deren Voraussetzungen in der Nähe der kritischen Temperatur am ehesten erfüllt sind, gibt in der unmittelbaren Nähe dieser Temperatur:

$$H = H_0(1 - m)^{3/2},$$

wo H_0 eine Konstante darstellt und weiter:

$$\varrho_1 - \varrho_2 = 2\beta\varrho_\infty(1 - m)^{1/2},$$

wo wieder β eine Konstante bedeutet. Deshalb wird wieder:

$$\frac{H}{\varrho_1 - \varrho_2} = \kappa(1 - m).$$

Allgemein setze ich also:

$$(18) \quad H = \kappa(1 - m)(\varrho_1 - \varrho_2).$$

In seiner Arbeit „Remarques sur le Théorème des états correspondants“ (vgl. auch Annales de Toulouse V) gibt Mathias empirische Formeln für die Densitäten der Flüssigkeit und des Dampfes. Für die Dampfdichte findet er allgemein:

$$\varrho_2 = A(1 - m - 1,124\sqrt{1 - m} + 0,579^2),$$

wo A eine Konstante darstellt.

Für CO_2 z. B.:

$$\varrho_2 = 1,295(1 - m - 1,13\sqrt{1 - m} + 0,579^2),$$

während für flüssige Kohlensäure die Dichte durch den Ausdruck:

$$\varrho_1 = 1,064(m - 0,569 + 1,655\sqrt{1 - m})$$

gegeben ist. Die Differenz der Densitäten wird deshalb durch eine Formel von der Form:

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \alpha m + \beta\sqrt{1 - m} - \gamma$$

ausgedrückt; α , β und γ sind positive Konstanten.

Für CO_2 wird $\alpha = 2,36$ und $\gamma = 2,32$. In Wirklichkeit müssen aber α und γ denselben Wert haben, denn für $T = T_c$ wird $\rho_1 = \rho_2$.

Deshalb:

$$(19) \quad \rho_1 - \rho_2 = \alpha (m - 1 + \beta \sqrt{1 - m}).$$

Durch Substitution in Formel (18) erhalten wir also:

$$(20a) \quad H = \alpha (1 - m) (m - 1 + \beta \sqrt{1 - m})$$

oder, wie man auch kann setzen:

$$(20b) \quad H = \alpha (1 - m)^{3/2} (\beta - \sqrt{1 - m}).$$

In der unmittelbaren Nähe der kritischen Temperatur kann $\sqrt{1 - m}$ vernachlässigt werden gegen β und wir erhalten für diesen Fall wieder die van der Waalsche Formel.

Für Äther gibt unsere Formel (20a) oder (20b):

$$H = 145(1 - m)^{3/2} - 119(1 - m)^2.$$

Hieraus folgt als Wert für H :

Für	$t = 20^\circ$	150°	190°
	$H = 16,49$	3,12	0,15
Beobachtet:	$H = 16,49$	2,98	0,16

Will man die Kapillarkonstante H in den Dichten der Flüssigkeit und des Dampfes ausdrücken, so kann man in Formel (18) $1 - m$ durch einen linearen Ausdruck von $\rho_1 + \rho_2$ ersetzen. Denn nach dem Gesetz von Cailletet-Mathias ist:

$$\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_c = \alpha(1 - m),$$

wo α eine Konstante bedeutet. Wir erhalten deshalb:

$$(21) \quad H = \alpha(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_c),$$

wo α wieder eine Konstante ist.

In der Nähe der Schmelztemperatur kann die Dichte des Dampfes gegenüber der der Flüssigkeit vernachlässigt werden, während für viele Körper bei dieser Temperatur die Dichte ρ_2 das Dreifache der kritischen Dichte ist. So fand Mathias¹⁾:

1) E. Mathias, Le Point Critique des Corps Purs p. 10.

Körper	ϱ_n	$\frac{1}{3} \varrho_0$	t (Schmelztemp.)
C_6H_6	0,3038	0,3000	0°
C_6H_5Fl	0,3543	0,3491	- 0,75
C_6H_5Cl	0,3665	0,3635	35°
C_6H_5Br	0,4860	0,4836	53°
C_6H_5J	0,5843	0,5808	77,8
CH_3OH	0,2775	0,2740	0
C_2H_5OH	0,2786	0,2690	0
C_2H_7OH	0,2777	0,2733	0
$(C_2H_5)_2O$	0,2631	0,2453	0
CH_3COOH	0,3516	0,3510	16,3
CCl_4	0,5557	0,5440	0
$SnCl_4$	0,7414	0,7465	14,9
SO_2	0,5200	0,5043	- 30

Nennen wir nun H_0 den Wert von H bei der Schmelztemperatur der genannten Körper, so gibt Formel (21):

$$H_0 = 3 \pi \varrho_n^2$$

und deshalb:

$$(22a) \quad H = \frac{1}{3} H_0 \frac{(\varrho_1 - \varrho_n)(\varrho_2 + \varrho_n - 2 \varrho_n)}{\varrho_n^2},$$

oder auch:

$$(22b) \quad \frac{H}{H_0} = \frac{1}{3} \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{\varrho_n^2} - \frac{2}{3} \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_n}.$$

In der ursprünglichen Theorie von van der Waals sind die Laplaceschen Kräfte zwischen den Volumenelementen unabhängig von der Temperatur und der Koeffizient a der Laplaceschen Formel des Molekulardruckes ist also eine Konstante. Weiter habe ich gezeigt¹⁾, daß in diesem Falle die innere Verdampfungswärme r_i durch die Formel:

$$r_i = a(\varrho_1 - \varrho_2)$$

ausgedrückt wird. Nennt man nun die Kraft, mit welcher die Kapillarschicht (pro Einheit ihrer Oberfläche) zwischen den homogenen Phasen der Flüssigkeit und des Dampfes nach der Flüssigkeit hingezogen wird, den Molekulardruck, so ist also:

$$K = a(\varrho_1^2 - \varrho_2^2).$$

Aus (22b) erhalten wir deshalb:

$$(22c) \quad \frac{H}{H_0} = \frac{K}{3 a \varrho_n^2} - \frac{2 r_i}{3 a \varrho_n}.$$

1) G. Bakker, Inaug.-Dissert. 1888.

Daß wirklich $a(\rho_1^2 - \rho_2^2)$ die Kraft darstellt, mit der die Kapillarschicht nach der Flüssigkeit hingezogen wird, kann wie folgt gezeigt werden. Diese Kraft muß n. l. im Gleichgewicht sein mit

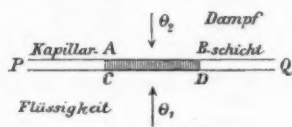


Fig. 2.

den thermischen Drucken, welchen die Flüssigkeit und der Dampf auf die Schicht ausüben. Nennen wir diese thermischen Drucke bez. θ_1 und θ_2 (Fig. 2) dann ist also:

$$K_1 = \theta_1 - \theta_2.$$

Nun ist sowohl in der Flüssigkeit, wie in dem Dampf, der Dampfdruck der Differenz zwischen thermischem Druck und Kohäsion gleich oder:

$$p_1 = \theta_1 - a \rho_1^2$$

und

$$p_1 = \theta_2 - a \rho_2^2.$$

Deshalb:

$$K = \theta_1 - \theta_2 = a(\rho_1^2 - \rho_2^2).$$

In der van der Waalsschen Theorie ist weiter:

$$a = 3 p_{\infty} v_{\infty}^2$$

und die Beziehung (22c) wird:

$$(22d) \quad 9 \frac{H}{H_0} = \frac{K}{p_{\infty}} - 2 \frac{r_i}{p_{\infty} v_{\infty}},$$

oder, wenn $R = p_{\infty} v_{\infty} / T_{\infty}$:

$$(22e) \quad 9 \frac{H}{H_0} = \frac{K}{p_{\infty}} - \frac{2 r_i}{R T_{\infty}}.$$

In der van der Waalsschen Theorie besteht also eine lineare Beziehung zwischen Kapillarkonstante, Molekulardruck und innerer Verdampfungswärme.

Bemerkung: Könnte man die Größe b in der van der Waalsschen Zustandsgleichung als eine Konstante betrachten, so hätte man:

$$p_1 = \frac{R T}{v_1 - b} - \frac{a}{v_1^2}$$

und

$$p_1 = \frac{R T}{v_2 - b} - \frac{a}{v_2^2},$$

wo v_1 und v_2 bez. die spezifischen Volumen der Flüssigkeit

bez. des Dampfes darstellen. Durch Subtraktion der zwei Gleichungen findet man:

$$p_1 (v_2 - v_1) = a (\varrho_1 - \varrho_2) + a b (\varrho_2^2 - \varrho_1^2)$$

oder

$$b K = r_i - p_1 u,$$

wo

$$u = v_2 - v_1.$$

Durch Substitution in Gleichung (22c):

$$9 \frac{H}{H_0} = \frac{r - 3 p_1 u}{R T_\kappa}.$$

Bedeutet also r die Verdampfungswärme, so ist also:

$$9 \frac{H}{H_0} = \frac{r - 4 p_1 u}{R T_\kappa}.$$

In der ursprünglichen van der Waalsschen Theorie würde also (wo a und b als Konstanten betrachtet werden), die Kapillarkonstante von Laplace der Differenz zwischen der Verdampfungswärme und dem Vierfachen der äußeren Verdampfungsarbeit proportional sein. Bei der kritischen Temperatur werden H , r und p , u Null und in der Nähe dieser Temperatur, also mit großer Annäherung:

$$r = 4 p_1 u.$$

Wirklich ist auch in der ursprünglichen van der Waalsschen Theorie bei der kritischen Temperatur:

$$\frac{r}{p_1 u} = \frac{T_\kappa}{p_\kappa} \frac{d p_\kappa}{d T} = 4.$$

Indessen wissen wir, daß der Wert des letzten Ausdruckes ungefähr 7 statt 4 ist. Ersetzen wir den Koeffizient a durch die Clausiussche Formel:

$$a = \frac{a_\kappa}{T}$$

und betrachten wir b nicht mehr als eine Konstante, sondern als eine unbekannte Volumfunktion, so ist der (Dampf-)Druck gegeben durch:

$$p_1 = T f(v) - \frac{a_\kappa}{T v^2}$$

und wird (vgl. oben):

$$r_i = \left(a - T \frac{d a}{d T} \right) (\varrho_1 - \varrho_2) = \frac{2 a_\kappa}{T} (\varrho_1 - \varrho_2).$$

Also durch Substitution in Gleichung (22b):

$$(23a) \quad \frac{H}{T} = H_0 \left(\frac{K}{3 a_n \varrho_n^2} - \frac{r_i}{3 a_n \varrho_n} \right).$$

Die Clausiussche Formel für a gibt¹⁾:

$$T \frac{d p_1}{d T} - p_1 = \frac{2 a_1}{T} \varrho_1 \varrho_2.$$

Da nun bei der kritischen Temperatur:

$$\frac{T}{p_1} \frac{d p_1}{d T} = 7$$

gesetzt werden kann, so wird:

$$a_n = 3 p_n v_n^2 T_n$$

und durch Substitution in (23a):

$$(23b) \quad \frac{H}{T} = \frac{1}{3} \frac{H_0}{T_n} \left(\frac{K}{p_n} - \frac{r_i}{R T_n} \right).$$

Es gibt also eine lineare Beziehung zwischen H/T , K und r_i , wenn die Zustandsgleichung von der Form:

$$p = T f(v) - \frac{a_n}{T v^2}$$

ist.

§ 3. Spannung und Energie der Kapillarschicht.

In einem Gefäß befinde sich Flüssigkeit nur in Berührung mit ihrem gesättigten Dampf. Vergrößern wir nun auf umkehrbare Weise durch die Bewegung zweier Kolben P und Q die Berührungsoberfläche, ohne das Volum des Gefäßes zu ändern, so ist (vgl. oben Fig. 1):

$$T d\eta = d\epsilon - H ds$$

oder nach der Gibbsschen Schreibweise:

$$(24) \quad H = \epsilon_s - T \eta_s.$$

Zur Berechnung von ϵ_s , denken wir uns eine Ebene der Oberfläche der Kapillarschicht parallel, so daß, wenn die Kapillarschicht weggenommen würde und die homogenen Phasen der Flüssigkeit bez. des Dampfes bis zu dieser Ebene fortgesetzt würden, die Quantität der Materie sich nicht änderte. Ist m

1) Zeitschr. für phys. Chem. 18. p. 4 (Formel 14').

die Masse der Kapillarschicht¹⁾, h' der Abstand unserer Ebene bis zu der flüssigen Phase und h die Dicke der Kapillarschicht, so hat man also:

$$h' \varrho_1 + (h - h') \varrho_2 = m,$$

oder:

$$h' = \frac{m - h \varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2} \quad \text{und} \quad h - h' = \frac{h \varrho_1 - m}{\varrho_1 - \varrho_2}.$$

Die Quantitäten der flüssigen bez. der dampfförmigen Phasen, welche die Kapillarschicht gebildet haben (man denke sich, daß die Oberfläche der Flüssigkeit um eine Einheit vergrößert wird), sind deshalb:

$$(25) \quad \frac{m \varrho_1 - h \varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2} \quad \text{und} \quad \frac{h \varrho_1 \varrho_2 - m \varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2}$$

und die Summe ihrer Energien wird:

$$(25a) \quad m \frac{\varrho_1 \varepsilon_1 - \varrho_2 \varepsilon_2}{\varrho_1 - \varrho_2} + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{u} h,$$

wo u die Differenz zwischen den spezifischen Volumina des Dampfes bez. der Flüssigkeit darstellt oder da die innere Verdampfungswärme r_i durch $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ dargestellt wird:

$$(25b) \quad m \frac{\varrho_1 \varepsilon_1 - \varrho_2 \varepsilon_2}{\varrho_1 - \varrho_2} + \frac{r_i}{u} h.$$

Nun folgt bekanntlich aus (24):

$$\varepsilon_s = H - T \frac{dH}{dT}$$

und weiter ist die Energie E der Kapillarschicht die Summe der Energie (25a) und ε_s . Deshalb:

$$(26a) \quad E = H - T \frac{dH}{dT} + m \frac{\varrho_1 \varepsilon_1 - \varrho_2 \varepsilon_2}{\varrho_1 - \varrho_2} + \frac{r_i}{u} h,$$

oder die Differenz zwischen dieser Energie und der Energie einer gleichen Quantität Flüssigkeit:

$$(26b) \quad E - m \varepsilon_1 = H - T \frac{dH}{dT} + \frac{m(v - v_1)}{u} r_i,$$

wenn v das Volum der Kapillarschicht *pro Einheit der Masse* darstellt.

1) Wenn wir es nicht ausdrücklich sagen, betrachten wir immer die Kapillarschicht pro Einheit ihrer Oberfläche.

Nun ist offenbar:

$$m r_i > E - m \varepsilon_1,$$

also:

$$H - T \frac{dH}{dT} + \frac{m(v - \varepsilon_1)}{u} r_i < m r_i,$$

oder, da $v > \varepsilon_1$:

$$(27) \quad m > \frac{H - T \frac{dH}{dT}}{r_i}.$$

Auf thermodynamischem Wege finden wir deshalb eine Grenze für die Masse der Kapillarschicht pro Einheit der Oberfläche.

Auf ähnliche Weise, wie Gleichung (26b) abgeleitet ist, finden wir:

$$(28) \quad m \varepsilon_2 - E = \frac{m(v_2 - v)}{u} r_i - \left(H - T \frac{dH}{dT} \right)$$

und (26b) und (28) geben wieder:

$$(29) \quad \begin{cases} E - m \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = H - T \frac{dH}{dT} \\ \quad + m \left(v - \frac{v_1 + v_2}{2} \right) \left(T \frac{dp_1}{dT} - p_1 \right). \end{cases} \quad 1)$$

(Durch eine Transformation könnte auch (26a) unmittelbar in der Form (29) geschrieben werden.)

Bei der kritischen Temperatur wird:

$$E = m \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}; \quad H = T \frac{dH}{dT} = 0 \quad \text{und} \quad v = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Wenn in Gleichung (26b) die Differenz $E - m \varepsilon_1$ (welche einer isothermischen Änderung entspricht) als potentielle Energie aufgefaßt wird, und die potentielle Energie der Kapillarschicht durch W dargestellt wird, so ist nach Gauss die Energie einer homogenen Phase²⁾ der Dichte proportional. Für isothermische Änderungen können wir also setzen:

$$\varepsilon_1 = - A \varrho_1,$$

wo A für eine bestimmte Temperatur als eine Konstante aufgefaßt werden kann. Dehnt man die Betrachtungen von Gauss auch auf die homogenen Phasen des Dampfes und setzen wir

1) p_1 stellt den Dampfdruck dar.

2) Heterogene Phasen sind durch Gauss nicht betrachtet. Die Dichte war bei seinen Betrachtungen eine Konstante.

voraus, daß die Volumelemente eines Körpers sich bei der Verdampfung nur durch ihre Dichte ändern, so ist auch:

$$\varepsilon_2 = -A \varrho_2 \quad \text{und} \quad r_i = A(\varrho_1 - \varrho_2).^1)$$

Durch Substitution dieser Werte von ε_1 und ε_2 wird (26a):

$$(30a) \quad W = H - T \frac{dH}{dT} + Ah\varrho_1\varrho_2 - Am(\varrho_1 + \varrho_2)$$

oder, wenn ϱ die mittlere Dichte der Kapillarschicht bedeutet:

$$(30b) \quad W = H - T \frac{dH}{dT} + Ah\{\varrho_1\varrho_2 - \varrho(\varrho_1 + \varrho_2)\}.$$

Zur Berechnung der *freien Energie* der Kapillarschicht suchen wir erstens diese Größe für die homogenen Phasen, welche die Kapillarschicht gebildet haben und addieren hierzu:

$$\varepsilon_s - T\eta_s \quad \text{oder} \quad H.$$

Nun ist, wenn μ_1 das thermodynamische Potential der homogenen Phasen Flüssigkeit und Dampf bedeutet (der Wert des thermodynamischen Potentials ist in beiden Phasen gleich):

$$\varepsilon_1 - T\eta_1 + p_1 v_1 = \mu_1 \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 - T\eta_2 + p_1 v_2 = \mu_1,$$

oder

$$\varepsilon_1 - T\eta_1 = \mu_1 - p_1 v_1 \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 - T\eta_2 = \mu_1 - p_1 v_2.$$

Die freie Energie der homogenen Phasen, welche die Kapillarschicht gebildet haben, wird also (vgl. (25)):

$$(31) \quad \left\{ \frac{m\varrho_1 - h\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2} (\mu_1 - p_1 v_1) + \frac{h\varrho_1\varrho_2 - m\varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2} (\mu_1 - p_1 v_2) \right. \\ \left. = m\mu_1 - p_1 h. \right.$$

Die freie Energie der Kapillarschicht wird deshalb:

$$(32) \quad E - T\eta = m\mu_1 - p_1 h + H.$$

Weiter ist, wenn p_2 den Druck *parallel* der Oberfläche der Kapillarschicht darstellt²⁾:

$$(33) \quad H = \int_1^2 (p_1 - p_2) dh.$$

1) G. Bakker, Inaug.-Dissert. 1888.

2) G. Bakker, Ann. d. Phys. 14. p. 611. 1904; Zeitschr. f. phys. Chem. 38. p. 483. 1900; 48. p. 3. 1904.

Ist weiter p der Druck der (labilen) homogenen Phasen im Punkt der Isotherme, wo:

$$\mu = \mu_1,$$

so hat man¹⁾:

$$(34) \quad p h = \int_1^2 p_2 d h.$$

Also:

$$H = (p_1 - p) h$$

und durch Substitution in (32):

$$E - T \eta = m \mu_1 - p h,$$

oder, wenn wir die Kapillarschicht pro *Einheit der Masse* betrachten und kleine Buchstaben wählen:

$$(35) \quad \varepsilon - T \eta + p v = \mu_1.$$

Die Größe p kann nach Belieben als der Druck der (labilen) homogenen Phasen im Punkt der Isotherme, wo $\mu = \mu_1$, aufgefaßt werden oder als der mittlere Druck in der Kapillarschicht ihrer Oberfläche *parallel*. v ist das spezifische Volum der Kapillarschicht, also das Volum pro Einheit ihrer Masse.

Bezeichnen wir die betrachteten Größen für die (labilen) Phasen im Punkt der Isotherme, wo $\mu = \mu_1$, mit dem Index 3, so ist also:

$$(36) \quad \begin{cases} \mu_1 = \varepsilon_1 - T \eta_1 + p_1 v_1 = \varepsilon_2 - T \eta_2 + p_1 v_2 \\ \quad = \varepsilon_3 - T \eta_3 + p v_3 = \varepsilon - T \eta + p v. \end{cases}$$

Während also die *Änderung* der freien Energie beim Übergang von der flüssigen Phase zur Kapillarschicht (pro Einheit der Masse) durch:

$$-(p v - p_1 v_1)$$

dargestellt wird, so hat man für den Wert der Änderung dieser Größe beim Übergang von Kapillarschicht zum Dampf:

$$-(p_1 v_2 - p v).$$

Die Summe dieser Ausdrücke ist $-p_1(v_2 - v_1)$ und stellt bekanntlich die Änderung der freien Energie beim Übergang von Flüssigkeit zum Dampf dar. (Der Ausdruck ist der negative Wert der äußeren Verdampfungsarbeit.)

1) G. Bakker, Zeitschr. f. phys. Chem. 48. p. 36. 1904.

Résumé:

I. Freie Energie der Flüssigkeit¹⁾:

$$\varepsilon_1 - T\eta_1 = \mu_1 - p_1 v_1.$$

II. Freie Energie der homogenen Phasen, welche die Kapillarschicht gebildet haben:

$$\varepsilon_1 - T\eta_1 = \mu_1 - p_1 v.$$

III. Freie Energie der Kapillarschicht:

$$\varepsilon_1 - T\eta_1 = \mu_1 - p v,$$

wo p den mittleren Druck in der Kapillarschicht *parallel* ihrer Oberfläche darstellt.

IV. Freie Energie des Dampfes:

$$\varepsilon_2 - T\eta_2 = \mu_1 - p_1 v_2.$$

Die Zunahme der gebundenen Energie beim Übergang einer Einheit Flüssigkeit zur Kapillarschicht kann berechnet werden aus dem Ausdruck für die Änderung der freien Energie:

$$- \{p v - p_1 v_1\},$$

oben gefunden.

Diese Zunahme der freien Energie (mit entgegengesetztem Zeichen genommen) gibt nach Addition der Zunahme der Energie:

$$n. l.: \varepsilon - \varepsilon_1 = S \left(H - T \frac{dH}{dT} \right) + (v - v_1) \frac{r_i}{u};$$

für die Zunahme der gebundenen Energie:

$$T\eta - T\eta_1 = p v - p_1 v_1 + S \left(H - T \frac{dH}{dT} \right) + (v - v_1) \frac{r_i}{u},$$

oder, da

$$H = (p_1 - p) h = (p_1 - p) \frac{v}{S},$$

$$T\eta - T\eta_1 = -S T \frac{dH}{dT} + \frac{v - v_1}{u} r_i + (v - v_1) p_1.$$

p_1 stellt den Dampfdruck dar; weiter ist $r = r_i + p u$ und deshalb:

$$T\eta - T\eta_1 = -S T \frac{dH}{dT} + (v - v_1) \frac{r_i}{u} = -S T \frac{dH}{dT} + (v - v_1) T \frac{dp_1}{dT},$$

1) Pro Einheit der Masse.

2) Gleichung (26b) angewendet für die Einheit der Masse. S ist die Oberfläche der Kapillarschicht pro Einheit der Masse.

oder:

$$(37) \quad \eta - \eta_1 = -S \frac{dH}{dT} + u_1 \frac{dp_1}{dT},$$

wenn $v - v_1$ durch u_1 angedeutet wird.

Auch auf folgende Weise hätten wir Formel (37) für die Änderung der Entropie finden können. Um eine Einheit der Flüssigkeit in den Komplex der homogenen Phasen, welche die Kapillarschicht gebildet haben, überzuführen, muß man eine Quantität Flüssigkeit

$$\frac{h \varrho_1 \varrho_2 - m \varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2} : m \quad (\text{vgl. die Ausdrücke (25)})$$

verdampfen. Die Wärme dazu ist:

$$\frac{h}{m} \frac{r}{u} - \frac{v_1}{u} r,$$

oder, da $h/m = v$, wird der Ausdruck für die zugeführte Wärme:

$$(v - v_1) T \frac{dp_1}{dT}.$$

Wenn der Komplex der homogenen Phasen zur Materie der Kapillarschicht wird, muß eine Quantität Wärme

$$-T \frac{dH}{dT} S$$

gegeben werden. Die ganze zugeführte Wärme r_1 bei der Verwandlung von einer Einheit der Flüssigkeit in Materie der Kapillarschicht wird also:

$$(39) \quad r_1 = -S T \frac{dH}{dT} + (v - v_1) T \frac{dp_1}{dT}.$$

Deshalb wieder:

$$(37) \quad \eta - \eta_1 = -S \frac{dH}{dT} + u_1 \frac{dp_1}{dT}.$$

Auf ähnliche Weise, oder durch die Bemerkung $r = T(\eta_2 - \eta_1)$ findet man

$$(38) \quad \eta_2 - \eta = S \frac{dH}{dT} + u_2 \frac{dp_1}{dT},$$

wo

$$u_2 = v_2 - v.$$

Aus (39) folgt:

$$(40) \quad \frac{d \cdot \frac{r_1}{T}}{dT} = -S \frac{d^2 H}{dT^2} - \frac{dS}{dT} \frac{dH}{dT} + u_1 \frac{d^2 p_1}{dT^2} + \frac{du_1}{dT} \frac{dp_1}{dT}.$$

Nennen wir $T(d\eta/dT) = c$ die spezifische Wärme der Kapillarschicht und c_1 die spezifische Wärme der Flüssigkeit, so gibt weiter (37):

$$(41) \quad c - c_1 = -ST \frac{d^2 H}{dT^2} - T \frac{dH}{dT} \frac{dS}{dT} + u_1 T \frac{d^2 p_1}{dT^2} + T \frac{du_1}{dT} \frac{dp_1}{dT}.$$

Durch Differentiation der Gleichung

$$\frac{r_1}{T} = \eta - \eta_1,$$

oder durch Kombination von (40) und (41) findet man:

$$T \frac{d \frac{r_1}{T}}{dT} = c - c_1$$

oder

$$(42) \quad \frac{d r_1}{dT} - \frac{r_1}{T} = c - c_1.$$

Auf ähnliche Weise finden wir, wenn r_2 die Wärme darstellt, welche nötig ist, um die Kapillarschicht pro Einheit der Masse in Dampf zu verwandeln, und c_2 die spezifische Wärme des Dampfes bedeutet:

$$(43) \quad \frac{d r_2}{dT} - \frac{r_2}{T} = c_2 - c.$$

Durch Zusammenziehung der Gleichungen (42) und (43) erhalten wir die klassische Gleichung:

$$\frac{d r}{dT} - \frac{r}{T} = c_2 - c_1$$

von Clausius zurück.¹⁾ Durch obige Betrachtungen haben wir gewissermaßen letztere Gleichung mit Hilfe der Kapillarschicht in zwei Teile gespalten. Gäbe es Mittel, um r_1 zu bestimmen, so würden wir auch c kennen lernen. Auch Gleichung (41) lehrt c nicht kennen, denn obgleich angenähert $d^2 H/dT^2 = 0$ und dH/dT als eine Konstante betrachtet werden kann, so ist wieder u_1 unbekannt.²⁾ Doch schien es mir nicht überflüssig, diese Gleichung zu deduzieren, denn sie lehrt in

1) Clausius schrieb h statt c_2 und c statt c_1 . Bei meinen Betrachtungen stellt c die spezifische Wärme der Kapillarschicht dar.

2) u_1 ist die Differenz zwischen den spezifischen Volumina der Kapillarschicht bez. der Flüssigkeit.

jedem Falle, daß die Verhältnisse der Wärmegrößen der Kapillarschicht nicht so einfach sind als es nach den Betrachtungen von A. L. Selby und anderen¹⁾ scheinen könnte.

§ 4. Die Dicke der Kapillarschicht.

Wenn Flüssigkeitslamellen, wie eine Ölschicht auf Wasser oder eine Seifenlösung in einem Drahtrechteck etc. immer dünner und dünner werden, so entstehen bekanntlich in der glänzenden Haut auf einmal an ihrer dünnsten Stelle runde schwarze Flecken, die wie runde Löcher aussehen. In der Zeitschr. f. phys. Chem. 51. p. 346. 1905 habe ich gezeigt, wie man diese Erscheinung als eine Folge der Andrews-van der Waalsschen Theorie der Isothermen betrachten kann. Die Messungen von Reinold und Rücker geben für die Dicke der von ihnen untersuchten *unsichtbaren* Lamelle rund $10\ \mu$, während für den dünnsten Teil der sichtbaren Lamelle rund etwa $50\ \mu$ Dicke angenommen werden kann. Wie ich bemerkt habe, folgt hieraus für die Dicke h einer *vollständigen* Kapillarschicht:

$$(44) \quad 25\ \mu > h > 5\ \mu.$$

Weiter habe ich bemerkt²⁾, daß die Kohäsionen und Drucke in einer Kapillarschicht bez. senkrecht und in der Richtung ihrer Oberfläche in einem bestimmten Punkt verschieden wären. Ist p_1 der Druck senkrecht auf die Oberfläche der Kapillarschicht (also der Dampfdruck) und p der mittlere Druck parallel ihrer Oberfläche, so war:

$$(45) \quad p_1 - p = \alpha \left(1 - \frac{T}{T_\infty}\right)^2,$$

wo α eine Konstante bedeutet.

Nun ist:

$$H = \int_1^2 (p_1 - p_2) dh = (p_1 - p) h^4,$$

1) M. Cantor, H. Pellat etc.

2) G. Bakker, Abhandl. d. Koninkl. Akad. van Wetensch. zu Amsterdam p. 313. 1899 und Zeitschr. f. phys. Chem. 33. p. 493. 1900; vgl. weiter Ann. d. Phys. 14. p. 612. 1904.

3) G. Bakker, Zeitschr. f. phys. Chem. 51. p. 357. 1905.

4) G. Bakker, Ann. d. Phys. 14. p. 612. 1904.

wo p_1 und p die Drucke bez. senkrecht und parallel der Richtung der Kapillarschicht bedeutet und für die Kapillarkonstante ist oben die Formel

$$(20b) \quad H = \kappa(1 - m)^{1/2}(\beta - \sqrt{1 - m})$$

abgeleitet, wo $m = T/T_*$. Deshalb finden wir als allgemeine Formel für die Dicke h der Kapillarschicht:

$$(46) \quad h = \frac{H}{p_1 - p} = \frac{\beta}{1 - m} - \alpha,$$

wo β und α Konstanten sind.

Wenn p_1 und p (also die Drucke bez. senkrecht und parallel zur Richtung der Kapillarschicht) in Atmosphären ausgedrückt werden, so fand ich für Äther¹⁾:

$$(45') \quad p_1 - p = 238(1 - m)^3,$$

oder in Dynen pro cm^2 :

$$p_1 - p = 238 \cdot 1,0133 \cdot 10^6 (1 - m)^3,$$

während wir oben für die Kapillarkonstante von Äther fanden:

$$(20b) \quad H = 145(1 - m)^{1/2} - 119(1 - m)^2.$$

Für die Dicke der Kapillarschicht von Äther (zwischen den homogenen Phasen der Flüssigkeit und des Dampfes) finden wir also:

$$h = \frac{0,6014 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - m}} - 0,493 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$$

oder

$$(47) \quad h = \frac{6,014}{\sqrt{1 - m}} - 4,93 \mu\mu.$$

Das gibt für Äther bei $T = \frac{1}{2} T_*$ oder $m = \frac{1}{2}$:

$$h = 3,57 \mu\mu,$$

und für $T = 0,8 T_*$ oder $m = 0,8$:

$$h = 8,53 \mu\mu.$$

Zwischen -40° (Schmelzpunkt -31°) und 100° gibt Formel (47) deshalb Werte von derselben Größenordnung. In der Nähe der kritischen Temperatur aber wird der Nenner $\sqrt{1 - m}$ sehr klein und erhält man Werte von ganz anderer Größenordnung. Für die kritische Temperatur wird der theoretische Wert von h unendlich.

1) G. Bakker, Zeitschr. f. phys. Chem. 51. p. 358. 1905.

Wäre Wasser gleichförmig mit Äther, was aber nicht der Fall ist, denn Wasser hat assoziierende Molekeln bis 230° (van Laar), so würde man bekanntlich für das Verhältnis der Dicken ihrer Kapillarschichten bei übereinstimmenden Temperaturen das Verhältnis der Kubikwurzeln aus den molekularen kritischen Volumen oder den Ausdrücken:

$$\sqrt[3]{\frac{T_n}{p_n}}$$

nehmen können. Man erhält:

$$\frac{h_{\text{Äther}}}{h_{\text{Wasser}}} = \frac{236}{151} = \text{rund } 1,5.$$

Man würde also für Wasser bei $T = 0,8 T_n$ erhalten:

$$h = \frac{8,53}{1,5} = 5,6 \mu.$$

Da es nun nicht wahrscheinlich ist, daß bei niedrigen Temperaturen die Größenordnung der betrachteten Größe für Wasser sich durch Bildung von Doppelmolekeln *ganz und gar* ändert, so glaube ich, daß meine Formel für h , wenigstens der Größenordnung nach, die Dicke der Kapillarschicht angibt. Übrigens habe ich¹⁾ meine Formeln noch auf andere Weise geprüft und Werte für die Dicke der Kapillarschichten erhalten, welche genügend im Einklang mit den Beobachtungen von Quincke, Reinold u. Rücker und Vincent sind.

1) G. Bakker, Zeitschr. f. phys. Chem. 51. p. 360 ff. 1905.

(Eingegangen 16. April 1905.)

3. *Über die Effekte gewisser Kombinationen von Kapazitäten und Selbstinduktionen;* *von L. Hermann.*

Die nachstehenden Mitteilungen schließen sich an frühere über einen ähnlichen Gegenstand an¹⁾, und sind wie diese durch das Bestreben veranlaßt, gewisse Eigenschaften des Nerven aufzuklären, welchen man als einen „induktiven Kern- oder Kapazitätsleiter“ bezeichnen kann.²⁾ Diesmal handelt es sich aber nicht um die wellenförmige Fortpflanzung elektrischer Einwirkungen, sondern um die Prinzipien der Messung der Selbstinduktion und der Kapazität solcher Leiter.

I. Theoretisches.

Zwei Punkten r und s eines Systems, welches Kapazitäten und Selbstinduktionen enthält, werde eine Potentialdifferenz P erteilt, diese nach Herstellung des stationären Zustandes wieder beseitigt, im gleichen Momente aber die Punkte r und s mit einem ballistischen Galvanometer verbunden. Die in letzteres sich ergießende Elektrizitätsmenge, welche eine Ablenkung bewirkt, wird dann je nach der Wahl der Punkte r und s verschieden sein.

Zunächst sollen einige einfachere Fälle kurz behandelt werden.

1. Eine Kapazität und eine Selbstinduktion.

In Fig. 1 sei c ein Kondensator von der Kapazität c , und q eine Induktionsrolle vom Selbstinduktionskoeffizienten q .

1) Vgl. L. Hermann, Ann. d. Phys. 12. p. 932. 1903; L. Hermann u. M. Gildemeister, Ann. d. Phys. 14. p. 1031. 1904. — Vgl. auch den Anhang zur vorliegenden Arbeit.

2) Einen *nicht* induktiven Kapazitätsleiter würde eine lange, außen und innen mit Stanniol beklebte Glasröhre darstellen. An der Nervenfasern ist die Kapazität durch die Polarisierbarkeit der Grenzfläche zwischen Hülle und Kern repräsentiert. Der Kern besitzt aber außerdem ein der Selbstinduktion völlig analoges Verhalten gegen elektrische Durchströmung.

Sind die beanspruchten Punkte r und s , so sind in bezug auf dieselben Kapazität und Induktion parallel geschaltet; sind es r und s' , so sind für diese Kapazität und Induktion hintereinander geschaltet. Der Effekt ist in beiden Fällen ganz verschieden.

a) Parallelschaltung (Punkte r, s).

Die r und s erteilte Potentialdifferenz P sei bei r positiv; die Pfeile im ausgezogenen Teile der Fig. 1 geben also die

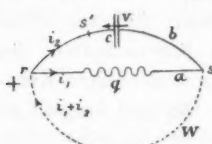


Fig. 1.

Stromrichtung durch P an. Der Widerstand in rqs sei a , derjenige in rcs (welcher übrigens in der Rechnung stets herausfällt) sei b . Der im Momente der Beseitigung von P angelegte punktierte Bogen habe den Widerstand W , und es

sollen die Vorzeichen der Ströme i_1 und i_2 so bleiben, wie sie vor Beseitigung von P waren. Nach derselben sei v das Potential des Kondensators zur Zeit t ; dann gelten die Gleichungen:

$$a i_1 + q \frac{\partial i_1}{\partial t} - b i_2 = v,$$

$$a i_1 + q \frac{\partial i_1}{\partial t} + W(i_1 + i_2) = 0,$$

$$c \frac{\partial v}{\partial t} = i_2,$$

aus welchen folgt (zur Abkürzung sei $aW + bW + ab = \Sigma$):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{c \Sigma + q}{(W + b) c q} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{W + a}{(W + b) c q} v = 0.$$

Wird die Zeit vom Momente der Beseitigung der Potentialdifferenz P gezählt, so ist für $t = 0$

$$v = P, \quad i_1 = \frac{P}{a}.$$

Die Integration, welche ich hier übergehe, ergibt dann v , i_1 und i_2 ; für uns kommt es nur auf die Stromintegrale an, welche sind:

$$\int_0^\infty i_1 dt = \frac{aWc + q}{a(W + a)} P, \quad \int_0^\infty i_2 dt = -cP,$$

also die Ablenkung des Galvanometers entspricht der Elektrizitätsmenge

$$(1) \quad \int_0^{\infty} (i_1 + i_2) dt = \frac{q - a^2 c}{a(W + a)} \cdot P = T.$$

Diese Elektrizitätsmenge wollen wir den „Effekt“ des Systems in bezug auf die Punkte r und s nennen, und mit dem Buchstaben T bezeichnen.

Der Galvanometereffekt ist also in unserem Falle: 1. unabhängig von b ; 2. abhängig von $q - a^2 c$, also Null, wenn $q = a^2 c$; 3. Induktion und Kapazität wirken in entgegengesetztem Sinne ablenkend.

Im vorstehenden ist auch der Fall erledigt, daß die Leitung rqs induktionslos, d. h. die Kapazität einem bloßen Widerstande a parallel geschaltet ist; in diesem Falle wäre der Effekt

$$(2) \quad T = - \frac{a}{W + a} c P.$$

Fehlt ferner die Leitung $r cs$, so ist in (1) $c = 0$ zu setzen, und der Effekt der allein vorhandenen Induktion ist

$$(3) \quad T = \frac{q}{a(W + a)} P.$$

b) Hintereinanderschaltung (Punkte r, s).

Die Stromstärken und Widerstände seien jetzt i_1 und a für rs' und i_2 und b für $rqcs'$, sonst alles wie vorher. Nach Ersatz von P (in rs') durch den Bogen W ist dann

$$a i_1 - b i_2 - q \frac{\partial i_2}{\partial t} = v,$$

$$a i_1 + W(i_1 + i_2) = 0,$$

$$i_2 = c \frac{\partial v}{\partial t},$$

woraus folgt

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\Sigma}{q(W + a)} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{q c} v = 0.$$

Die Integration ergibt unter den nunmehrigen Anfangsbedingungen, nämlich: für $t = 0$

$$v = P \quad \text{und} \quad i_1 = 0,$$

$$T = \int_0^{\infty} (i_1 + i_2) dt = - \frac{a}{W + a} c P,$$

d. i. derselbe Effekt (vgl. oben), als wenn die Induktion nicht vorhanden wäre. Eine *hinter* eine Kapazität geschaltete Induktion ist also auf die Elektrizitätsmenge ohne jeden Einfluß. Dies ist auch selbstverständlich, da die Induktionsspule in diesem Falle im Augenblick der Wegnahme von P stromlos ist, also keinen Extrastrom liefern kann.

2. Mehrere Kapazitäten.

Für eine Reihe von Kapazitäten von der Größe $c_1, c_2, c_3 \dots$ kann man hinsichtlich der Gesamtkapazität C folgende leicht zu beweisenden Sätze aufstellen:

1. für Parallelschaltung ist $C = \Sigma c$,

2. für Hintereinanderschaltung ist $\frac{1}{C} = \Sigma \frac{1}{c}$,

d. h. Kapazitäten verhalten sich hinsichtlich der Schaltung gerade umgekehrt wie Widerstände. (Induktionskoeffizienten summieren sich wie Widerstände.)

Es gibt aber noch einen *dritten* Hauptfall der Kombination von Kapazitäten, nämlich den der *Parallelschaltung*, aber mit *einseitiger* Beanspruchung. Gerade dieser Fall ist für die Frage des Kernleiters von fundamentaler Bedeutung.

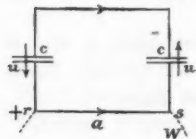


Fig. 2.

Das einfachste, in Fig. 2 dargestellte Beispiel dieser Art läßt sich auch so auffassen, daß zwei hintereinandergeschaltete Kapazitäten c dem Widerstand a parallel geschaltet sind, und ist daher durch den vorigen Paragraphen erledigt. Da nämlich die beiden Kapazitäten nach dem eben sub 2. angeführten Satze $c/2$ geben, so ist

$$T = - \frac{a}{W + a} \cdot \frac{c}{2} P.$$

1) In den mir bekannten Lehrbüchern finde ich diesen leicht zu beweisenden Satz nicht angeführt.

Wenn noch mehr Kapazitäten c in die Leitung $rccs$ eingeschaltet würden, so wäre in vorstehender Gleichung für $c/2$ zu setzen $c/3$, $c/4$ etc.

Nicht so ist es bei mehr als zwei Kapazitäten c in der Anordnung der Fig. 3, in welcher die vier Kondensatoren bei r und s beansprucht werden. Der Widerstand der Leitung $rpqs$ sei wieder a , derjenige der Leitung tz sei b ; die Widerstände rp , pq etc. seien gleich. Die Richtungs- und Strombezeichnungen ergeben sich aus der Figur.

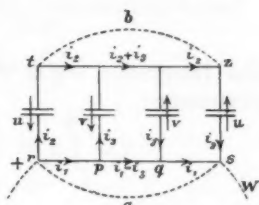


Fig. 3.

Aus Symmetriegründen muß das Potential symmetrischer Kondensatoren gleich groß sein; das der äußeren sei u , das der inneren v . Für die Ladung gelten die Gleichungen

$$\frac{a}{3} (3 i_1 - i_3) = P,$$

$$\frac{a}{3} (3 i_1 - i_3) - \frac{b}{3} (3 i_2 + i_3) = 2 u,$$

$$\frac{a}{3} (i_1 - i_3) - \frac{b}{3} (i_2 + i_3) = 2 v,$$

$$i_2 = c \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$i_3 = c \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Um die schließlich eintretende Ladung zu übersehen, braucht man nicht zu integrieren, sondern es genügt folgendes. Im Stationärzustande muß $\partial u / \partial t$ und $\partial v / \partial t = 0$ sein; dann ergibt sich aber $i_2 = i_3 = 0$, und aus den drei Gleichungen links:

$$i_1 = \frac{P}{a}, \quad i_1 = \frac{2 u}{a}, \quad \frac{i_1}{3} = \frac{2 v}{a},$$

also

$$u = \frac{P}{2}, \quad v = \frac{P}{6},$$

d. h. die Kondensatoren laden sich auf das Potential ihrer Fußpunkte in der Linie rs . Bei ungerader Zahl würde also der mittelste sich überhaupt nicht laden.

Für die Entladung gelten (mit Beibehaltung der Ladungsrichtungen) dieselben Gleichungen wie oben, nur die erste ist zu ersetzen durch

$$\frac{a}{3} (3 i_1 - i_3) + W (i_1 + i_2) = 0.$$

Aus denselben folgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2(6\Sigma + a^2)}{(a+b)\Sigma \cdot c} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{18(W+a)}{(a+b)\Sigma c^2} u = 0.$$

Ganz dieselbe Gleichung gilt auch für v . Die Anfangsbedingungen sind (vgl. oben): für $t = 0$

$$u = \frac{P}{2} \quad \text{und} \quad v = \frac{P}{6}.$$

Die Integration ergibt für die in W sich ergießende Elektrizitätsmenge

$$I = \int_0^{\infty} (i_1 + i_2) dt = -\frac{5}{9} \cdot \frac{a}{W+a} \cdot c P.$$

Die resultierende Kapazität in bezug auf die Punkte r, s ist also

$$C = \frac{5}{9} c.$$

Von großem Interesse ist es nun, zu einer beliebigen Anzahl so geschalteter und beanspruchter Kondensatoren überzugehen. Der Weg der Rechnung ist hier kaum zweckmäßig und mindestens sehr weitläufig. Es genügt aber folgende Betrachtung.

Aus Fig. 3 erkennt man, daß je zwei symmetrische Kondensatorenpaare sich durch die Leitung a so entladen, daß die Ströme sich superponieren. Während aber die Ladung des äußeren Paares voll auf die Punkte r, s wirkt, kommt von der Ladung des inneren Paares nur $\frac{1}{3}$ auf die Punkte r, s , während $\frac{2}{3}$ sich zwischen p und q abgleichen. Bei sechs Kondensatoren würde vom innersten Paar nur $\frac{1}{5}$ auf r, s kommen. Bei n Paaren, also $m = 2n$ Kondensatoren, würden also für den Effekt in r, s , von der Mitte nach außen gerechnet, der Reihe nach folgende Bruchteile in Betracht kommen:

$$\frac{1}{m-1}, \quad \frac{3}{m-1}, \quad \frac{5}{m-1} \cdot \cdot \cdot \quad \frac{m-1}{m-1}.$$

Die Ladungspotentiale selbst sind aber, wie oben gezeigt, entsprechend den Potentialen auf der Linie rs abgestuft, und zwar, da das letzte Potential gleich $P/2$ ist, von der Mitte nach außen der Reihe nach (für $2v, 2u$ etc.)

$$2 \cdot \frac{1}{m-1} \cdot \frac{P}{2}, \quad 2 \cdot \frac{3}{m-1} \cdot \frac{P}{2}, \quad 2 \cdot \frac{5}{m-1} \cdot \frac{P}{2}, \quad \dots \quad 2 \cdot \frac{m-1}{m-1} \cdot \frac{P}{2}.$$

Jedes dieser Potentiale ist noch mit der Kapazität des betr. Paares, d. h. $c/2$ zu multiplizieren. So ergibt sich als Gesamteffekt des Systems in bezug auf r, s :

$$T = \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (m-1)^2}{2(m-1)^2} \cdot \frac{a}{W+a} \cdot c P,$$

oder mit Zuhilfenahme einer bekannten Summierungsformel

$$T = \frac{m(m+1)}{12(m-1)} \cdot \frac{a}{W+a} \cdot c P,$$

oder die resultierende Kapazität

$$C = \frac{m(m+1)}{12(m-1)} \cdot c.$$

Dies ergibt z. B. für $m=2$ $C = \frac{1}{2}c$, für $m=4$ $C = \frac{5}{6}c$, für $m=6$ $C = \frac{7}{10}c$ etc.

Bei einer *ungeraden* Zahl von Gliedern bleibt, wie schon bemerkt, das mittelste ungeladen, und eine der vorigen analoge Betrachtung, welche hier übergangen werden kann, führt zu dem Ergebnis (für ungerades m):

$$C = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \left(\frac{m-1}{2}\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{m-1}{2}\right)^2} c = \frac{m(m+1)}{12(m-1)} c,$$

also zu demselben Gesetz wie für gerade m . Über experimentelle Bestätigung vgl. unten.

Hieran schließt sich noch eine auf den *kontinuierlichen Kapazitätsleiter* bezügliche wichtige Folgerung.

Anstatt immer mehr Kapazitäten von der Größe c in der angegebenen Weise zu kombinieren, wollen wir bei m Gliedern die Kapazität jedes einzelnen gleich c/m annehmen, d. h. wir denken uns eine gegebene Kapazität c in immer mehr Teile zerschnitten und diese kombiniert. Die resultierende Kapazität des Systems ist dann

$$C = \frac{m+1}{12(m-1)} c,$$

nähert sich also mit zunehmendem m immer mehr dem Grenzwerte

$$C = \frac{c}{12}.$$

Eine unendliche Zahl von Teilen stellt aber einen kontinuierlichen Kapazitätsleiter dar, wie die p. 501, Anm. 2 angeführte

Röhre, oder eigentlich jede Leidener Flasche, deren einer Belegung man am Rand und Boden eine Potentialdifferenz erteilt. Nur würde man hierzu wegen des geringen Widerstandes der Belegung eine enorme Spannung brauchen. Man kann sich aber die Belegungen beliebig lang und schmal vorstellen. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, daß bei dieser Art der Beanspruchung eines Kondensators nach Wegnahme der Potentialdifferenz eine vollständige innere Entladung stattfindet, da die beiden Hälften entgegengesetzt geladen sind, wie man aus Figg. 2 oder 3 sieht. Die Röhre, Flasche, Kernleiter kann also bei dieser Behandlung nicht als Magazin von Elektrizität dienen, hat aber trotzdem eine bestimmte über die allgemeine Leiterkapazität hinausgehende Kapazität und entsprechenden „Effekt“, d. h. nimmt während der Einwirkung einer gegebenen Potentialdifferenz eine bestimmte Elektrizitätsmenge auf. Diese Kapazität ist nun, wie wir gesehen haben, $\frac{1}{12}$ derjenigen, welche zwischen den beiden Belegungen vorhanden ist.

Übrigens läßt sich das vorstehende Ergebnis auch infinitesimal ableiten. Für Leiter dieser Art gilt nämlich, wenn nur die Längendimension in Betracht kommt und ε das Potential an der Stelle x zur Zeit t bedeutet, κ die Kapazität der Längeneinheit und w den Widerstand derselben, die Differentialgleichung¹⁾:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{\kappa w} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}.$$

Wird das System geladen, so muß nach Erreichung des stationären Zustandes $\partial \varepsilon / \partial t = 0$ sein, also $\varepsilon = \alpha x + \beta$, worin α und β Konstanten. Verlegt man den Nullpunkt der x in die Mitte des Leiters, dessen Länge gleich $2l$ sei, und führt man wieder den beiden Enden die Potentialdifferenz P zu, so wird $\beta = 0$ und $\alpha = P/2l$, das Potential an der Stelle x ist also

$$\varepsilon = \frac{P}{2} \cdot \frac{x}{l}.$$

Von jedem ε kommt für die Ableitung durch die Endpunkte wiederum (wie p. 506) der Bruchteil $\varepsilon \cdot x/l$ in Betracht. End-

1) Man erhält z. B. diese Gleichung, wenn man in der Gleichung des induktiven Kernleiters (Ann. d. Phys. 12. p. 932. 1903) die Induktion $p = 0$ setzt.

lich ist die Kapazität eines Paares symmetrischer Längenelemente gleich $\kappa \cdot dx$. Der Effekt ist also (wenn $2wl = a$ und der Widerstand des Galvanometerbogens gleich W gesetzt wird)

$$T = \frac{a}{W + a} \int_0^l \frac{P}{2} \cdot \frac{x^2}{l^2} \kappa dx = \frac{a}{W + a} \cdot \frac{\kappa l P}{6}.$$

Da aber die Kapazität des ganzen Leiters (in gewöhnlichem Sinne verstanden) $c = 2l\kappa$ ist, so resultiert als Kapazität für diese Art der Beanspruchung

$$C = \frac{c}{12}.$$

3. Mehrere Kapazitäten und Induktionen.

Von den zahlreichen denkbaren Kombinationen dieser Art soll nur die in Fig. 4 schematisierte, d. h. die in meiner früheren Arbeit untersuchte, behandelt werden, welche auf Eigenschaften des Nerven Bezug hat. q seien Induktionsrollen vom Koeffizienten q , gegenüber induktionsfreie Widerstände w .

Wird dies System von r, t oder von s, z aus beansprucht,

so stellt es einen einfachen

Kondensator dar, dessen Kapazität bei m Elementen von der Kapazität c den Betrag mc hat. Allerdings tritt die Ladung und Entladung dieses Kondensators nicht auf einmal, sondern in der früher behandelten wellenförmigen Sukzession ein; auf die Integrale der Effekte hat dies aber keinen Einfluß.

Außerdem kann aber dies System auch von tz oder von rs aus beansprucht werden.

Der erstere Fall erledigt sich höchst einfach. Wie in dem p. 503 f. betrachteten Falle können hier die Induktionen auf den Effekt keinen Einfluß haben, weil sie hinter den Kapazitäten geschaltet und die Spulen im Augenblick der Wegnahme der Potentialdifferenz von tz stromlos sind. Es kann

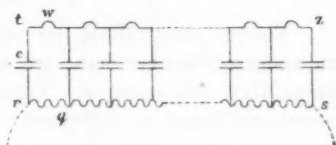


Fig. 4.

sich also nur diejenige resultierende Kapazität C des Systems zeigen, welche sich aus dem vorigen Paragraphen ergibt.

Bei Beanspruchung von r, s aus haben wir dagegen, wie man leicht erkennt, einen Fall vor uns analog dem p. 502 betrachteten. Ist C die resultierende Kapazität im Sinne des vorigen Paragraphen, Q die Summe aller q , so muß der Effekt (a und W im früheren Sinne genommen)

$$T = \frac{a}{W+a} (Q - a^2 C) P$$

sein, was sich durch Versuche völlig bestätigt (vgl. unten).

Bestimmt man also den Effekt sowohl für die Punkte t, u als auch für r, s , so läßt sich sowohl C für sich, als auch Q für sich aus den Versuchen bestimmen.

Eine Reihe anderer Kombinationen und anderer Beanspruchungsarten werde ich, da sie weniger allgemein physikalisches Interesse haben, an anderer Stelle behandeln.

II. Versuche.

a) Zur Methode.

Sowohl zur Prüfung der vorstehenden Ergebnisse als auch zu anderen Zwecken habe ich ungemein zahlreiche Messungen ausgeführt, und dabei ein Verfahren verwendet, welches zwar prinzipiell längst in Gebrauch, aber in manchen Beziehungen bequemer eingerichtet ist.

Die Aufgabe, den Punkten r und s eines Systems eine Potentialdifferenz P zu erteilen, und im Augenblick der Beseitigung derselben den Effekt T auf ein bis dahin stromloses Galvanometer wirken zu lassen, wird bekanntlich sehr vollkommen durch eine Wheatstonekombination verwirklicht, deren einen Zweig a das System bildet, während für die anderen Zweige b, c, d die Widerstände so abgeglichen sind, daß $a:b = c:d$. Ist w der Widerstand der Kettenleitung mit der elektromotorischen Kraft E , und γ derjenige der Brückenleitung, so ist die Potentialdifferenz P der Punkte r und s

$$P = \frac{a(c+d)E}{wS + (a+b)(c+d)},$$

worin

$$S = a + b + c + d.$$

Dieser Wert an Stelle von P ist in den obigen Formeln für T einzusetzen, und an Stelle von W der Widerstand der Leitung zwischen r und s in der Wheatstonekombination, d. h.

$$W = a + \frac{(b+d)\gamma}{b+d+\gamma};$$

der so erhaltene Wert ist dann, da durch das Galvanometer nur der Bruchteil $(b+d)/(b+d+\gamma)$ geht, mit diesem Bruche zu multiplizieren. So erhält man z. B. für den Effekt der Gleichung (1), p. 503, die Ablenkung

$$\alpha = k(q - a^2 c) \frac{(b+d)(c+d)E}{[wS + (a+b)(c+d)][\gamma S + (a+c)(b+d)]},$$

worin k eine für das Galvanometer gültige Konstante, d. h. die von der Elektrizitätsmenge 1 bewirkte Ablenkung, ist.

Die Konstante k läßt sich nun bequem durch einen unmittelbar sich anschließenden Eichversuch eliminieren. Man braucht dazu nur, durch Umlegen der Wippe R (Fig. 5) von

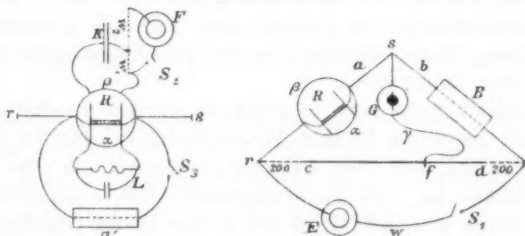


Fig. 5.

α nach β , statt des beobachteten Systems L , die Eichvorrichtung KFS_2 zwischen r und s einzuschalten.¹⁾ K ist ein Kondensator von der Kapazität K , der durch Schließen von S_2 auf das Potential $Fw_1/(w_1 + w_2) = V$ geladen wird; diese Kapazität ist parallel geschaltet dem Rheostaten a' , dessen Widerstand gleich a sein muß (der Schlüssel S_3 , der im Hauptversuch offen ist, wird zum Eichversuch geschlossen).²⁾ Beim

1) Der Deutlichkeit halber ist in der Hauptfigur nur die Wippe angegeben, in der Nebenfigur links das ganze zwischen r und s befindliche System.

2) Besteht das System L nur aus einem gewöhnlichen Kondensator, so bleibt S_2 im Haupt- und im Eichversuch geschlossen, und a' bildet den dem Kondensator parallel zu schaltenden Widerstand.

Öffnen von S_2 gibt dann die Elektrizitätsmenge KV die Ablenkung

$$\beta = k \cdot \frac{a(b+d)}{\gamma S + (a+c)(b+d)} KV,$$

und aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$q - a^2 c = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{V}{E} \cdot \frac{a[wS + (a+b)(c+d)]}{c+d} \cdot K.$$

Die Dimension dieses Ausdruckes ist eine Länge, und zwar gibt er, wenn die Widerstände in Ohm ausgedrückt sind, und $K = 1$ Mikrof. ist, Zentimeter an, wenn man den Faktor 10^3 hinzufügt. Für $q = 0$ erhält man c direkt in Mikrofarad.

Sehr zweckmäßig ist es, stets $c = d$, also b (durch Stöpselung am Rheostat B) gleich a zu machen, ferner die Widerstände c und d so einzurichten, daß sie (Fig. 5) aus je einer Widerstandsrolle (bei mir stets 200 Ohm), und dazwischen einem einfachen Platindraht mit verschiebbarer Schneide (f) bestehen. Die Verschiebung von f dient dann nur zur korrigierenden Beseitigung kleiner Ablenkungen, und eine Ablesung der Stellung kann ganz unterbleiben.

Endlich kann man es leicht so einrichten, daß w recht klein ist gegen die übrigen Widerstände; bei mir ist w nicht über 0,2 Ohm, weil E ein Akkumulatorelement von etwa diesem Widerstande ist. Da $a = b$ mindestens 600, $c = d = 200$ Ohm ist, so kann man das Glied wS in der letzten Gleichung vernachlässigen, da der hierdurch eingeführte Fehler noch nicht $\frac{1}{15}$ Proz. beträgt. Dann nimmt aber die Formel die höchst einfache Gestalt an

$$(A) \quad q - a^2 c = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{V}{E} \cdot 2 a^2 K$$

und für bloße Kapazitätsmessungen

$$(B) \quad -c = \frac{2\alpha}{\beta} \cdot \frac{V}{E} \cdot K.$$

b) Versuchsbeispiele.

Von den zahlreichen nach vorstehendem Verfahren angestellten Versuchen führe ich nur ein Beispiel für jede Kombination an. Durchweg war $E = 2$ Volt, $V = \frac{4}{3}$ Volt, also $V/E = \frac{2}{3}$; $K = 1$ Mikrof.

Versuch 1. Induktionskoeffizient einer Sekundärspule von 10770 Windungen und 1044 Ω . Der Versuch ergibt

$$a = 1044. \quad \alpha = + 58, \quad \beta = 44,$$

woraus Formel (A) ergibt

$$q = 1,92 \cdot 10^9 \text{ cm.}$$

Versuch 2. Dieselbe Spule (diesmal wegen anderer Temperatur 1048 Ω) mit dem Eisenkern ihrer Primärspule, welcher nur einen kleinen Teil des Lumens ausfüllt

$$a = 1048. \quad \alpha = + 203, \quad \beta = 44, \quad \text{also } q = 6,76 \cdot 10^9 \text{ cm.}$$

Versuch 3. Dieselbe Spule ohne Kern, parallel geschaltet mit einem Kondensator von 1 Mikrof.

$$a = 1048. \quad \alpha = + 24, \quad \beta = 44, \quad \text{also } q - a^2 c = 7,99 \cdot 10^8 \text{ cm.}$$

Da $a^2 c = 10,98 \cdot 10^8 \text{ cm}$, so ergibt sich indirekt $q = 1,90 \cdot 10^9 \text{ cm}$, gut stimmend zu Versuch 1.

Versuch 4. Dieselbe Spule mit Kern, parallel zu 1 Mikrof.

$$a = 1048. \quad \alpha = + 169, \quad \beta = 44, \quad \text{also } q - a^2 c = 5,62 \cdot 10^9 \text{ cm.}$$

Hieraus folgt indirekt $q = 6,72 \cdot 10^9$, gut stimmend zu Versuch 2.

Versuch 5. Dieselbe Spule ohne Kern, hinter 1 Mikrof. geschaltet, parallel zum Rheostatwiderstand von 1048 Ω

$$a = 1048. \quad \alpha = - 33, \quad \beta = 44, \quad \text{also } c = 1,00 \text{ Mikrof.}$$

Die Induktion ist also, der Theorie entsprechend, ohne jeden Einfluß auf den Effekt. (Der auffallend genaue Wert von c rührt davon her, daß der Eichkondensator auch als Versuchskondensator benutzt wurde.)

Versuch 6. Derselbe Versuch, aber die Spule mit Kern. Ergebnis genau dasselbe; also auch erhöhte Selbstinduktion hat keinen Einfluß.

Versuch 7. Vier gleiche Boassche Glimmerkondensatoren in der Weise von Fig. 4 geschaltet. Auf der einen Seite (r, s) drei kleine Induktionsspulen von je etwa 250 Ω , auf der anderen (t, z) drei bifilar gewickelte Widerstandsrollen von je 200 Ω .¹⁾

1) Der Widerstand auf dieser Seite kommt zwar, wie gezeigt ist, für das Resultat nicht in Betracht, darf aber bei Beanspruchung von t, z nicht zu klein sein, damit man nicht zu hohe Spannungen für überhaupt merkbliche Effekte, d. h. für ein merkliches P braucht.

1. Die drei Spulen für sich, von den Kondensatoren abgetrennt

$a = 744$. $\alpha = + 25$, $\beta = 31$, also $q = 5,95 \cdot 10^8$ cm,
d. h. pro Spule $1,98 \cdot 10^8$.

2. Dieselben mit eingesteckten, sie völlig ausfüllenden Drahtkernen

$a = 744$. $\alpha = + 240$, $\beta = 31$, also $q = 5,71 \cdot 10^9$ cm,
d. h. pro Spule mit Kern $1,90 \cdot 10^9$.

3. Das System vollständig, die Spulen ohne Kern. Zuleitung bei r , t , so daß das System als gewöhnlicher Kondensator von vierfacher Kapazität beansprucht wird, und zwar parallel zu einem Rheostatwiderstand von 1000Ω

$a = 1000$. $\alpha = - 128$, $\beta = 41$, also $C = 4,16$ Mikrof.,
d. h. pro Einzelkondensator $c = 1,04$ Mikrof.

Haben die Spulen Kerne, so ist, wie zu erwarten war, das Ergebnis genau dasselbe.

4. Zuleitung zu den Punkten t , z (induktionslose Seite). Die Spulen ohne Kerne

$a = 600$. $\alpha = - 11$, $\beta = 25$, also $C = 0,59$ Mikrof.

Es bestätigt sich (vgl. p. 509), daß die Induktion bei dieser Beanspruchung keinen Einfluß hat. Die Theorie verlangt ferner (p. 506) als resultierende Kapazität

$$C = \frac{5}{9} c = \frac{5}{9} \cdot 1,04 \text{ Mikrof.} = 0,58 \text{ Mikrof.},$$

bewährt sich also sehr gut.

Mit Kernen in den Spulen ist das Resultat genau dasselbe, also auch verstärkte Induktion ohne Einfluß.

5. Zuleitung zu den Punkten r und s (Induktionsseite). Die Spulen ohne Kerne

$a = 744$. $\alpha = + 12$, $\beta = 31$, also $q - a^2 C = 2,86 \cdot 10^8$ cm.

Mit dem gefundenen $C = 0,59$ Mikrof. (vgl. Nr. 4) gibt dies $q = 6,13 \cdot 10^8$ cm, gegen die direkte Messung $5,95 \cdot 10^8$ in Nr. 1. Der berechnete Wert von C (vgl. oben) liefert $q = 6,07 \cdot 10^8$.

6. Ebenso, aber die Spulen mit Kernen

$a = 744$. $\alpha = + 226$, $\beta = 31$, also $q - a^2 C = 5,38 \cdot 10^9$ cm.

Mit $C = 0,59$ Mikrof. gibt dies $q = 5,71 \cdot 10^9$; die direkte Messung (Nr. 2) ergab dasselbe Resultat.

Versuch 8. Eine der vorigen völlig analoge Versuchsreihe wurde mit 14 Papierkondensatoren, ebenfalls in der Anordnung der Fig. 4 ausgeführt, mit 13 Induktionsspulen und 13 Widerstandsrollen der gleichen Art wie im vorigen Versuch. Es wird genügen, wenn ich ohne Anführung aller Einzelwerte nur die Hauptresultate anführe.

Bei *zweiseitiger* Beanspruchung (r, t oder r, z) ergab sich eine Gesamtkapazität von 17,898 Mikrof., also für jeden der 14 Kondensatoren durchschnittlich 1,278 Mikrof.¹⁾

Bei Zuleitung zu t, z , d. h. zur induktionslosen Seite, ergab sich, mochten die Spulen Kerne haben oder nicht, wieder kein Einfluß der Induktion, und als Kapazität ergab sich $C = 1,70$ Mikrof. Die Theorie verlangt für diesen Fall

$$C = \frac{14 \cdot 15}{12 \cdot 13} c = \frac{210}{156} \cdot 1,278 = 1,72 \text{ Mikrof.},$$

bewährt sich also gut.

Bei Zuleitung zu r, s , d. h. zu den Enden der Spulenseite, wurde gefunden ($a = 3233$) *ohne* Kern:

$\alpha = -138^2$, $\beta = 125$, also $q - a^2 C = -1,538 \cdot 10^{10}$ cm,
mit Kernen:

$\alpha = +58$, $\beta = 125$, also $q - a^2 C = +6,467 \cdot 10^9$ cm.
Dies ergibt mit $C = 1,70$ für 13 Spulen ohne Kern

$$q = 23,8 \cdot 10^8 \text{ cm, d. h. pro Spule } 1,83 \cdot 10^8,$$

für 13 Spulen mit Kern

$$q = 24,24 \cdot 10^9 \text{ cm, d. h. pro Spule } 1,86 \cdot 10^9,$$

1) Die Kapazität dieser Papierkondensatoren, welche vor 2 Jahren gleich nach ihrer Anfertigung ziemlich genau ein Mikrof. war, hat sich seitdem um fast 28 Proz. vermehrt, vermutlich teils durch Schrumpfung des Dielektrikums, teils durch Änderung der Dielektrizitätskonstante. Bei Papierkondensatoren scheint diese Veränderung nichts Seltenes zu sein.

2) In diesem Versuche ist also $q < a^2 C$. Man könnte auf die Abstoßung einer Kapazität C , für welche $a = 0$ wird, ein Verfahren zur Messung eines parallel geschalteten q begründen. Dies ist aber prinzipiell nichts anderes als die bekannte Maxwellsche Methode, nur daß bei dieser q und C nicht parallel im Schenkel a , sondern einander diametral gegenüber in den Schenkeln a und d , oder b und c , angebracht sind; in diesem Falle ist die Ablenkung Null, wenn $q = a d C = b c C$.

während die direkte Bestimmung (Versuch 7, 1. und 3.) ergab $1,98 \cdot 10^8$ bez. $1,90 \cdot 10^9$; die Übereinstimmung ist leidlich.

Jedenfalls hat sich die Theorie in diesen, und ebenso in allen anderen Versuchen bestätigt.

Anhang über weitere Versuche betreffend Wellen in Systemen der bezeichneten Art.

Die in den eingangs zitierten Arbeiten mitgeteilten Versuche habe ich im letzten Jahre mit sehr vervollkommenen Hilfsmitteln wiederholt, indem ich statt des graphischen Kapillarelektrometers das Galvanometer in Verbindung mit einem Helmholtzschen Pendel benutzte, dessen vier Kontakte sowohl als Schließungs- wie als Öffnungskontakte eingerichtet werden konnten.

Das untersuchte System bestand, wie früher, aus 15 Papierkondensatoren von (jetzt) 1,28 Mikrof. (zum Teil aus 6 Glimmerkondensatoren von 1,04). Die Belegungen waren auf der einen Seite durch 14 Induktionsspulen mit oder ohne Kern, auf der anderen, um einseitige Zuleitungen auch auf dieser Seite verwenden zu können¹⁾, durch 14 Widerstandsrollen von je 200 Ohm verbunden. Die elektrische Einwirkung (Schließung oder Öffnung konstanter Ströme, einfache oder oszillatorische Kondensatorentladungen) wurde dem einen Ende des Systems entweder zweiseitig oder einseitig durch einen Pendelkontakt zugeführt; das andere Ende war entsprechend mit dem Galvanometer verbunden, dessen Leitung aber erst eine bestimmte Zeit nach der Einwirkung je nach Umständen dauernd oder temporär geschlossen wurde, durch einen, bez. zwei Pendelkontakte. An den Mikrometerschrauben, welche das Intervall zwischen Einwirkung und Galvanometerschluß, bez. die Dauer des letzteren regulieren, entspricht eine Umdrehung $\frac{1}{4636}$ Sek., und die Teilung der Köpfe gestattet auf Hundertstel einer Umdrehung einzustellen.

Es erscheint nicht notwendig, die Versuche im einzelnen

1) Vgl. oben p. 513 Anm. Bei Papierkondensatoren war zweiseitige Zu- und Ableitung in den neuen Versuchen nicht ausführbar, wegen der stets vorhandenen eigenen elektromotorischen Wirkungen, die am Kapillarelektrometer sich nicht störend einmischten, am Galvanometer aber sehr bedeutend.

mitzuteilen, sondern ich begnüge mich mit einer kurzen Angabe der wesentlichen Ergebnisse. Auch diesmal bestätigte sich, daß der Vorgang stets eine erhebliche Zeit braucht um das System zu durchlaufen, und daß ein kurzer Vorgang bei vielen Gliedern am letzten erst beginnt, nachdem er am ersten schon abgelaufen ist, daß er ferner während des Ablaufes ein sehr bedeutendes Dekrement zeigt, wie es die Theorie verlangt, daß endlich — und dies ist den früheren Versuchen gegenüber neu — Oszillationen während des Ablaufes durch ein langes System vollständig amortisiert werden. Der Beginn der Erscheinung am Ende des Systems läßt sich zwar bei dem jetzigen Verfahren viel schärfer feststellen, als an der S-förmig sich erhebenden Kurve des Kapillarelektrometers, aber der Beginn ist auch hier ein allmählicher, so daß die Fortpflanzungszeit nicht mit absoluter Schärfe sich ermitteln läßt. Wenn man sie bis zur ersten, einen Bruchteil eines Skalengrades betragenden Ablenkung rechnet, so ist sie wiederum, wie in den früheren Versuchen, merklich kleiner, als die Theorie es verlangt. Jedoch ist die Annäherung an den theoretischen Wert noch größer als in der letzten, mit Hrn. Gildemeister ausgeführten Untersuchung. Während damals die kleinste Abweichung von dem theoretischen Wert (für kernlose Spulen, die allein maßgebend sind) 5,9 Proz. des letzteren betrug, ging sie jetzt auf fast 4 Proz. herab. Wieder zeigten sich die Fortpflanzungszeiten für sehr starke Ströme kleiner als für schwache.

Daß die immer noch vorhandenen Abweichungen von der Theorie auf Versuchsfehlern beruhen, ist nach wie vor unwahrscheinlich.

Königsberg i. Pr., Physiologisches Inst., 15. April 1905.

(Eingegangen 18. April 1905.)

4. Über die
Wiedervereinigung der Ionen in Luft;¹⁾
von T. Retschinsky.

Die vorliegende Arbeit behandelt drei Aufgaben über ionisierte Gase.

I. Bestimmung des Koeffizienten der Wiedervereinigung der Ionen bei Zimmertemperatur, für den Fall, daß die Ionen Molionen sind, und die Wirkung des elektrischen Feldes zu vernachlässigen ist. Es wurden zwei Methoden benutzt: die erste (E. Riecke) erfordert zur Bestimmung des Koeffizienten α die Messung des Sättigungsstromes und eines nahezu gesättigten Stromes; die zweite (J. Stark) erfordert die Messung des Sättigungsstromes und eines anderen Stromes, der so klein ist, daß die Ionisation von ihm nicht beeinflußt wird.

II. Untersuchung des Einflusses der Adsorption neben der Wiedervereinigung; dieser Einfluß ergibt sich aus der scheinbaren Abhängigkeit des Koeffizienten α von dem Elektrodenabstand.

III. Die Abhängigkeit des Koeffizienten α vom Druck.

I. Theorie der Beobachtungsmethoden.

§ 1. Grundgleichungen.

Die Vorgänge in ionisierten Gasen zwischen zwei unendlichen planparallelen Platten lassen sich nach E. Riecke²⁾ mit Hilfe der folgenden Differentialgleichungen beschreiben:

1) Auszug aus der Göttinger Dissertation.

2) E. Riecke, Ann. d. Phys. 12. p. 52. 1903; Göttinger Nachr. math.-phys. Kl. p. 1. 1903.

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{N}^+}{\partial t} = -v U \frac{\partial (\bar{N}^+ F)}{\partial x} + \bar{k}^+ \frac{\partial^2 \bar{N}^+}{\partial x^2} + q - \alpha \bar{N}^+ \bar{N}, \\ \frac{\partial \bar{N}^-}{\partial t} = v V \frac{\partial (\bar{N}^- F)}{\partial x} + \bar{k}^- \frac{\partial^2 \bar{N}^-}{\partial x^2} + q - \alpha \bar{N}^+ \bar{N}, \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 4 \pi \varepsilon (\bar{N}^+ - \bar{N}^-), \\ \varepsilon v (U \bar{N}^+ + V \bar{N}^-) F - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (\bar{k}^+ \bar{N}^+ - \bar{k}^- \bar{N}^-) = c. \end{cases}$$

Die Buchstaben haben folgende Bedeutungen:

ε das Elementarquantum,

c die galvanische Strömung,

\bar{N}^+ die Dichte der positiven Ionen,

\bar{N}^- „ „ „ negativen „ ,

q Ionisierungsstärke,

α Koeffizient der Wiedervereinigung (Molisierungskoeffizient),

\bar{k}^+ Diffusionskoeffizient der positiven Ionen,

\bar{k}^- „ „ „ negativen „ ,

U Beweglichkeit (spezifische Geschwindigkeit) der positiven Ionen,

V „ „ „ negativen „ ,

v Lichtgeschwindigkeit,

F Feldstärke,

l Elektrodenabstand.

Die Größen \bar{N}^+ , \bar{N}^- , q und F sind als Funktionen der Zeit (t) und des Raumes (x) zu betrachten.

Alle Größen sind in elektrostatischem Maße gemessen.

§ 2. Methoden von Langevin und Mc Clung.

Die Gleichungen (I) bis (II) lassen sich nicht im allgemeinsten Falle integrieren. Um ihre experimentelle Prüfung zu ermöglichen, ist man gezwungen, sie durch spezielle Annahmen über die Beschaffenheit der vorkommenden Größen und durch zweckmäßige Versuchsanordnung zu vereinfachen.

P. Langevin¹⁾ nimmt an, daß die Diffusionskoeffizienten $\overset{+}{k}$ und \bar{k} Null sind. Als Ionisator benutzt er Röntgenstrahlen und zwar bei kleiner Unterbrechungszahl in der Sekunde, so daß alle Ionen, die durch einen Ionisierungsstoß erzeugt worden sind, vor Beginn des nächsten Stoßes durch das elektrische Feld gegen die Elektroden weggetrieben sind. In diesem Falle ist die Ionisierungsstärke q Null zu setzen. Die Schätzung der Veränderlichkeit der Feldstärke ergibt, daß sie als konstant betrachtet werden darf. Durch diese Spezialisierung lassen sich die Gleichungen (I) in folgende Form bringen:

$$(III) \quad \begin{cases} \frac{\partial \overset{+}{N}}{\partial t} + \nu U F \frac{\partial \overset{+}{N}}{\partial x} = -\alpha \overset{+}{N} \bar{N}, \\ \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} - \nu V F \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} = -\alpha \overset{+}{N} \bar{N}. \end{cases}$$

Die Integration zwischen geeigneten Grenzen führt zu der Formel:

$$\frac{h Q}{\sigma} = \log \left(1 + \frac{h Q_0}{\sigma} \right),$$

wo

$$4 \pi \sigma = F, \quad h = \frac{\alpha}{4 \pi \nu (U + V)}$$

gesetzt ist. Q ist diejenige Elektrizitätsmenge, die unter der Wirkung des Feldes F an den Elektroden gesammelt wird; wenn F ins Unendliche wächst, konvergiert Q nach Q_0 .

Aus den Messungen von Q und F lassen sich h und α berechnen.

Mc Clung²⁾ setzt ebenfalls $\overset{+}{k} = \bar{k} = 0$; außerdem noch $\overset{+}{N} = \bar{N} = N$; als Ionisator dient ebenfalls Röntgenstrahlung; er ionisiert erst das Gas so lange, bis im stromlosen Zustand die Ionisation stationär geworden ist, dann stellt er die Röntgenstrahlung ab und legt in einer ersten Versuchsreihe gleichzeitig die Elektrodenspannung an, um so N_0 , die stationäre Ionenzahl, zu erhalten. In einer zweiten Versuchsreihe legt er zu einer gemessenen Zeit t nach Unterbrechung der

1) P. Langevin, Thèses de l'université de Paris 1902.

2) Mc Clung, Phil. Mag. 3. p. 288. 1902.

Röntgenstrahlung die Elektrodenspannung an, um die zur Zeit t noch vorhandene Ionenzahl zu ermitteln. Die Elektrodenspannung ist in beiden Versuchsreihen so groß gewählt, daß im Sättigungsstrom sämtliche momentan vorhandene Ionen an die Elektroden geführt werden; ist die durch ihn an die eine Elektrode geführte Elektrizitätsmenge E_0 bez. E , so ist

$$N_0 = \frac{E_0}{e} \quad \text{bez.} \quad N = \frac{E}{e}.$$

McClung benutzt also bei dieser Methode den Vorgang der Wiedervereinigung für sich allein. Bei dieser Methode sind q und F in den obigen Gleichungen gleich Null zu setzen.

Die Gleichungen (I) reduzieren sich also auf die Differentialgleichung der Wiedervereinigung:

$$(IV) \quad \frac{\partial N}{\partial t} = -\alpha N^2.$$

Diese Gleichung (IV) läßt sich integrieren; man findet:

$$(V) \quad \frac{1}{N} - \frac{1}{N_0} = \alpha t,$$

wo $N = N_0$ ist zur Zeit $t = 0$.

Aus N_0 , N und t wird α berechnet.

Eine zweite zur Berechnung von α von McClung benutzte Formel lautet:

$$(VI) \quad \alpha = K \frac{Q}{N^{\frac{3}{2}}},$$

wo K eine Konstante des Apparates ist; N_0 hat dieselbe Bedeutung wie in der Formel (V); Q ist die Zahl der Ionen, die in einer Sekunde im Apparate entstehen; Q wird aus dem stationären Sättigungsstrom ermittelt (vgl. § 3).

Von den früheren experimentellen Arbeiten über den Koeffizienten der Wiedervereinigung sind zu erwähnen: J. J. Thomson und E. Rutherford¹⁾, E. Rutherford²⁾ und S. Townsend.³⁾

1) J. J. Thomson u. E. Rutherford, *Phil. Mag.* **42**, p. 392. 1896.

2) E. Rutherford, *Phil. Mag.* **44**, p. 422. 1897.

3) S. Townsend, *Phil. Trans.* (5) **193**, p. 129. 1900.

§ 3. Methode des nahezu gesättigten Stromes von Riecke.

Eine Gasschicht sei zwischen zwei planparallele Platten eingeschlossen; sie werde in konstanter Stärke q ionisiert; eine Spannungsdifferenz zwischen den Elektroden unterhalte einen stationären Strom im Gas. Für diesen Fall hat E. Riecke die Berechnung der in Betracht kommenden Größen in folgender Weise durchgeführt.

Da der Vorgang stationär ist, müssen alle in den Gleichungen (I) bis (II) vorkommenden Größen von der Zeit unabhängig sein; somit

$$\frac{\partial \dot{N}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = 0,$$

und wir bekommen:¹⁾

$$(VII) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dF}{dx} = 4\pi\varepsilon(\dot{N} - \bar{N}), \\ \nu\varepsilon(U\dot{N} + V\bar{N})F - \varepsilon\frac{d}{dx}(\dot{k}\dot{N} - \bar{k}\bar{N}) = c, \\ q = \nu U\frac{d(\dot{N}F)}{dx} - \dot{k}\frac{d^2\dot{N}}{dx^2} + \alpha\dot{N}\bar{N}, \\ q = -\nu V\frac{d(\bar{N}F)}{dx} - \bar{k}\frac{d^2\bar{N}}{dx^2} + \alpha\dot{N}\bar{N}. \end{array} \right.$$

Setzen wir voraus, daß die Ionen im elektrischen Felde so schnell verschoben werden, daß der Ionenverlust durch Wiedervereinigung und Diffusion vernachlässigt werden kann, so lassen sich die Gleichungen (VII) integrieren ($\dot{k} = \bar{k} = \alpha = 0$) und wir bekommen für den speziellen Fall des Sättigungsstromes die folgenden Gleichungen:

$$(VIII) \quad \left\{ \begin{array}{l} F^2 = F_0^2 - \frac{8\pi c}{\nu V}x + \frac{4\pi\varepsilon(U+V)}{\nu UV}qx^2, \\ \dot{N}F = \frac{q}{\nu U}x, \\ \bar{N}F = \frac{c}{\varepsilon\nu V} - \frac{q}{\nu V}x, \\ c = \varepsilon ql, \end{array} \right.$$

1) E. Riecke, Göttinger Nachr. math.-phys. Kl. p. 336. 1903.

wo F_0 die Feldstärke für $x = 0$ ist; q ist bei der Integration als eine Konstante betrachtet.

Setzen wir in die mit k^+ , k^- und α multiplizierten Glieder der Gleichungen (VII) die Werte für N^+ und N^- aus den Gleichungen (VIII) ein, so bekommen wir die erste Näherung, die Gleichungen für den nahezu gesättigten Strom, welche ebenfalls sich integrieren lassen. Mit Benutzung der numerischen Werte ergibt sich:

$$(IX) \quad \left\{ \begin{aligned} F^2 &= F_0^2 - 0,226 \cdot 10^{-10} q l x + 0,268 \cdot 10^{-10} q x^2 \\ &\quad + 36,3 \cdot 10^{-24} \frac{q^3}{F_0^2} (l - x)^2 x^2 + 0,67 \cdot 10^{-15} \frac{q x}{F_0} \end{aligned} \right.$$

Sind F_0 , q und l so gewählt, daß die Feldstärke F durch F_0 ersetzt werden kann, so bekommt man schließlich in zweiter Annäherung folgenden Ausdruck für α :

$$(X) \quad \alpha = 5,52 \cdot 10^{-4} \frac{(C - c) F_0^2}{c^2 l} \left(1 - 0,20 \frac{C - c}{c} \right),$$

wo C den Sättigungsstrom bedeutet

$$(U = 1,26 \cdot 10^{-8}, \quad F = 1,74 \cdot 10^{-5}).$$

Dieser Ausdruck ist bei Berechnung des α aus den auf Grund der Beobachtungen konstruierten Volt-Ampère-Kurven benutzt.

§ 4. Methode der kleinen Stromstärke von Stark.

Die in § 3 angedeutete Rieckesche Methode erleichtert die Behandlung der allgemeinen Gleichungen dadurch, daß man von vornherein auf nahezu gesättigte Ströme sich beschränkt, d. h. auf hohe Spannungen; die in diesem Paragraphen zu behandelnde Methode, welche dem Verfasser von Hrn. J. Stark mitgeteilt wurde, schlägt einen entgegengesetzten Weg ein; sie behandelt die Gleichungen (VII) für kleine Spannungen; die Diffusion ist zunächst vernachlässigt.

Durch Integration der Gleichungen (VII) im Falle¹⁾

1) G. Mie gelangt zu übereinstimmenden Resultaten auch im allgemeinen Falle; der angewandten Versuchsanordnung entsprechen die

$^+k = \bar{k} = 0$, $U = V$ hat J. J. Thomson¹⁾ den Ausdruck für das Verhältnis F_e/F_m gewonnen, wo F_m die Feldstärke in der Mitte zwischen den Elektroden, F_e die Feldstärke an den Elektroden ist.

Der Ausdruck lautet:

$$(XI) \quad \frac{F_e}{F_m} = \beta^{\frac{1}{2} - \frac{2}{\beta}} = 2,81^{\frac{1}{3}} = 2,23, \text{ wo } \beta = \frac{8\pi\varepsilon y U}{\alpha} = 2,81.$$

Die Feldstärke ist in der Mitte konstant, die Veränderlichkeit ist auf einen kleinen Bereich von der Länge λ neben der Elektrode beschränkt; den Einfluß der Veränderlichkeit kann man aus dem Ausdruck¹⁾ schätzen, der die untere Grenze für λ gibt:

$$(XII) \quad \frac{\lambda}{l} = \frac{c}{2C},$$

wo c wie früher den beobachteten Strom, C den Sättigungsstrom darstellt.

Ist c klein gegen C , so können wir

$$\frac{\int_0^x F dx}{x} = \frac{V}{x} = F = \text{Konst.}$$

setzen; daraus folgt:

$$\frac{dF}{dx} = 4\pi\varepsilon(N^+ - \bar{N}) = 0,$$

$$N^+ = \bar{N}.$$

Unter dieser Voraussetzung mögen die Gleichungen (VII) direkt behandelt werden. Sie lauten anders geschrieben:

$$(m) \quad N\varepsilon = \frac{1}{(U+V)} \left\{ \frac{c}{Fv} + \frac{V dF}{4\pi dx} \right\},$$

Thomson'schen Gleichungen besser, da die Spannung bei jeder Messung kommutiert und nur Doppelausschlag beobachtet wurde. G. Mie, Ann. d. Phys. 13. p. 858. 1904.

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. 47. p. 257. 1899.

$$(n) \quad \bar{N}\varepsilon = \frac{1}{(U+V)} \left\{ \frac{c}{F\nu} - \frac{UdF}{4\pi dx} \right\},$$

$$(p) \quad \begin{cases} \nu \frac{d(U\bar{N}F)}{dx} = q - \alpha \bar{N}^+, \\ -\nu \frac{d(V\bar{N}F)}{dx} = q - \alpha \bar{N}^-. \end{cases}$$

Da $dF/dx = 0$ ist, folgt aus (m) und (n):

$$\bar{N}^+ = \bar{N}^- = N = \frac{c}{\varepsilon\nu F(U+V)}$$

und

$$(XIII) \quad \varepsilon\nu N(U+V)F = c,$$

Aus (p) folgt:

$$(r) \quad \frac{1}{2}(U-V) \frac{dNF}{dx} = q - \alpha N^2.$$

N ist in demselben Umfange konstant wie F , da also

$$\frac{dNF}{dx} = 0$$

ist, so folgt aus (r):

$$(XIV) \quad q = \alpha N^2.$$

Aus (XIII) und (XIV) ergibt sich¹⁾:

$$(XV) \quad \begin{cases} C = \varepsilon\alpha \int_0^l N^2 dx + c = \varepsilon\alpha \int_0^l \frac{c^2}{\varepsilon^2(U+V)^2\nu^2 F^2} dx + c \\ \quad \quad \quad = \varepsilon\alpha \frac{c^2 l}{\varepsilon^2(U+V)^2\nu^2 F^2} + c \end{cases}$$

und

$$(XVI) \quad \frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{(C-c)(U+V)^2\nu^2 F^2}{c^2 l}.$$

Die Formel (XVI) wird unten bei Berechnung der Abhängigkeit α vom Drucke benutzt; ihr besonderer Wert liegt darin, daß die gemachten Voraussetzungen sich leicht experimentell prüfen lassen; außerdem gibt sie die Möglichkeit, den Einfluß der Diffusion, die vom Drucke abhängt, zu schätzen.

1) J. Stark, Die Elektrizität in Gasen p. 42.

II. Versuchsanordnung.

§ 5. Apparat.

Den im folgenden beschriebenen experimentellen Untersuchungen über den Koeffizienten der Wiedervereinigung (Molisierungskoeffizienten) wurde die Rieckesche Methode des nahezu gesättigten Stromes und die Methode der kleinen Stromstärke zugrunde gelegt; die benutzte Versuchsanordnung möge im folgenden beschrieben werden.

Der in Fig. 1 dargestellte Apparat besteht aus einer gut geschliffenen kreisförmigen Messingplatte *AA* von 3 mm Dicke und 30 cm Durchmesser und einer ihr gegenüberliegenden von

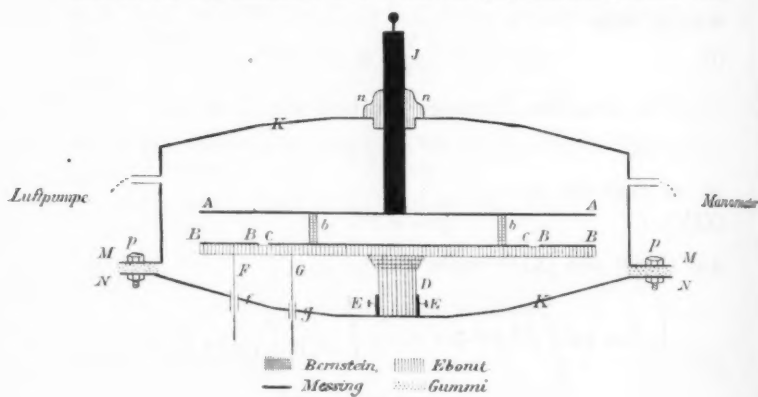


Fig. 1.

derselben Dicke und Form *CC*, die 20 cm Durchmesser hat; der Schutzring *BB* von 4,7 cm liegt in der Ebene von *CC* im Abstände $BC = 3$ mm. Der Schutzring und die *CC*-Platte liegen fest auf der kreisförmigen Ebonitplatte von 1 cm Dicke und 30 cm Durchmesser, die mit Hilfe eines Ebonitzylinders *D* und Schrauben *E* befestigt werden kann. Die Ableitungsdrähte *F* und *G* gestatten den Schutzring mit der Erde, die Scheibe *CC* mit dem Galvanometer zu verbinden; in *f* und *g* sind die Drähte mit Bernstein isoliert. Die Platte *AA* wird mit Hilfe eines 1 cm dicken Messingstiftes *J*, der in Ebonitfassung *nn* verschiebbar ist, mit einer Batterie verbunden. Um die Platten

parallel zu erhalten, sind drei Bernsteinzylinder b von 5 mm Durchmesser auf die Platte CC gestellt und die Platte AA mit diesen Zylindern in Berührung gebracht. Die Höhen der benutzten Zylinder waren 3, 5, 8, 10 und 13 mm. Das äußere Gehäuse besteht aus dem gewölbten Messingkessel K von der Dicke 3–5 mm. Vom oberen Teile des Kessels ragt der Rand MM hervor, vom unteren NN ; zwischen MM und NN befindet sich ein Gummiring, der mit Hilfe von 16 Schrauben P zwischen MM und NN zusammengepreßt werden kann.

Um den Apparat luftdicht zu bekommen, wurde der Gummiring mit Olivenwachs bedeckt; die Schrauben gepreßt und an den Stellen n, f, g mit Siegellack gegen das heiße Metall verkittet. Mit einer Handluftpumpe konnte bis auf 20 mm Druck evakuiert werden.

Die Ionisation wurde dadurch erzeugt, daß auf die Platte CC und den Schutzring eine dünne gleichmäßige Schicht von Radiumchlorid gelegt wurde.

§ 6. Schaltung und Genauigkeit.

Die Schaltung war folgende: die Elektrode AA konnte mit Hilfe einer Batterie und eines Kommutators entweder positiv oder negativ geladen werden; die Elektrode CC wurde durch das Galvanometer zur Erde abgeleitet; der Schutzring wurde ebenfalls mit der Erde verbunden.

Zur Messung der Ströme wurde ein Edelmannsches Galvanometer benutzt von der Empfindlichkeit etwa $7 \cdot 10^{-10}$ Amp. pro Skalenteil bei 1 m Abstand des Fernrohres. Die Empfindlichkeit wurde mit Hilfe einer Nebenschaltung in dem aus Akkumulator und Rheostaten bestehenden Stromkreise bestimmt.

Als Stromquelle wurden vier Akkumulatorenkasten benutzt, die zusammen etwa 600 Volt lieferten. Um kleine Spannungen zu bekommen, wurde die Nebenschaltung in einem aus Akkumulator und Rheostaten bestehenden Stromkreise benutzt.

Es wurde immer Doppelausschlag beobachtet, und zwar in zweierlei Weise: Bei den Messungen der Kurven, die in Fig. 2 und Tab. 1 dargestellt sind, war der Ausschlag rechts 5 Min. nach der Einschaltung der Spannung, links 5 Min. nach der Umschaltung beobachtet; bei Strömen, deren Stärke nicht

unter 10^{-8} Amp. liegt, war der Beobachtungsfehler kleiner als $\frac{1}{2}$ Proz. Bei anderen Messungen wurden Schwingungsausschläge beobachtet; der Fehler betrug dann weniger als 1 Proz.

Da immer die Hälfte des Doppelausschlages als Stromstärke genommen ist, so stellen die sämtlichen Tabellen und Kurven das arithmetische Mittel aus den beiden Strömen dar, die bei positiver Spannung und dann bei gleicher negativer beobachtet wurden.

Der Fehler, der aus der Nichtproportionalität zwischen dem Strome und dem Ausschlage entsteht, ist in Rechnung gezogen, da das Galvanometer während jeder Messungsreihe von neuem geeicht wurde.

Im folgenden ist beispielshalber ein Auszug aus dem Beobachtungsprotokoll wiedergegeben.

26. Februar. Temperatur $8,5^{\circ}$ C. Druck 752 mm. $l = 10$ mm.

Empfindlichkeit des Galvanometers

33 Min. nach 11 Uhr	1027,25	37 Ohm ¹⁾
	550,25	
	477,0	
47 Min. nach 11 Uhr	1027,15	37 Ohm
	550,25	
	476,90	

Strom im Kondensator

12 Uhr	1043,5	320 Elemente ²⁾ der Akkumulatorenatterie
	535,4	
	508,1	

Empfindlichkeit des Galvanometers

14 Min. nach 12 Uhr	1027,35	37 Ohm
	550,5	
	476,85	

1) Entspricht der Stromstärke $i = \frac{2,042 \cdot 37}{10^4 \cdot 10^5}$ Amp., wo 2,042 die Spannung des Akkumulators, 10^4 Ohm der Widerstand der Hauptschaltung, $\frac{2,042 \cdot 37}{10^4}$ Volt die Endspannung der Nebenschaltung, 10^5 Ohm der Widerstand der Nebenschaltung ist.

2) Elektrodenspannung von 320 Akkumulatorenzellen = 573,36 Volt.

Kondensatorströme

29 Min. nach 12 Uhr	1043,25	240 Elemente
	536,1	
	<hr/> 507,15	
45 Min. nach 12 Uhr	1042,55	160 Elemente
	536,80	
	<hr/> 505,75	
3 Min. nach 1 Uhr	1039,35	80 Elemente ¹⁾
	540,15	
	<hr/> 499,20	

Empfindlichkeit des Galvanometers

19 Min. nach 1 Uhr	1027,85	37 Ohm
	550,5	
	<hr/> 477,35	

Kondensatorströme

34 Min. nach 1 Uhr	1029	40 Elemente
	550,5	
	<hr/> 478,5	
48 Min. nach 1 Uhr	994,85	20 Elemente
	580,5	
	<hr/> 414,35	

Empfindlichkeit des Galvanometers

2 Min. nach 2 Uhr	982,20	30 Ohm
	594,65	
	<hr/> 387,55	

Kondensatorstrom

17 Min. nach 2 Uhr	926,75	10 Elemente
	639,85	
	<hr/> 286,90	

Empfindlichkeit des Galvanometers

31 Min. nach 2 Uhr	916	20 Ohm
	657,25	
	<hr/> 258,75	

Kondensatorstrom

46 Min. nach 2 Uhr	865	5 Elemente
	698,35	
	<hr/> 166,65	

1) 80 Zellen = 151,18 Volt.

Empfindlichkeit des Galvanometers		
59 Min. nach 2 Uhr	848,5	10 Ohm
	719,5	
	129,0	
Kondensatorstrom		
17 Min. nach 3 Uhr	803,65	2,042 Volt
	762,85	
	40,80	

Im folgenden möge auch die Berechnung von α/ε an einem den vorstehenden Beobachtungen entnommenen Beispiele anschaulich gemacht werden. Es ist

$$l = 1,0 \text{ cm}, \quad F_0 = 151 \text{ Volt.}$$

Ein Teilstrich der Skala entspricht

$$\frac{2,04 \cdot 37 \cdot 10^{-9}}{477} = 1,58 \cdot 10^{-10} \text{ Amp.},$$

Sättigungsstrom

$$C = 1,58 \cdot 508 \cdot 10^{-10} = 803 \cdot 10^{-10} \text{ Amp.}$$

Strom bei 151 Volt Elektrodenspannung

$$c = 1,58 \cdot 499 \cdot 10^{-10} = 789 \cdot 10^{-10} \text{ Amp.}$$

$$C - c = 14 \cdot 10^{-10}, \quad \frac{C-c}{c} = 177 \cdot 10^{-4}, \quad 0,20 \frac{C-c}{c} = 0,004.$$

$$\frac{C-c}{c^2} = 224 \cdot 10^3, \quad F_0^2 = 151^2 = 228 \cdot 10^3,$$

Elektrodenquerschnitt

$$Q = 200 \text{ qcm. } ^1)$$

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{5,52 \cdot 10^{-4} \cdot 224 \cdot 10^3 \cdot 228 \cdot 10^3 \cdot (1 - 0,004) \cdot 2 \cdot 10^2}{300^2 \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot 4,69 \cdot 10^{-10}} = 4434.$$

1) Der Elektrodenquerschnitt Q ist aus folgenden Zahlen berechnet: die metallische Oberfläche betrug 313 qcm. Sie war in der Mitte mit einer gleichförmigen Schicht des Radiumpräparates in der Weise bedeckt, daß ein etwa 1,5 cm breiter Ring am Rande von Radium frei war. Bei dieser Bedeckung waren die Ströme der Tab. 1 gemessen. Für den Sättigungsstrom ergab sich die Zahl 803. Bei einer zweiten Beobachtungsreihe war die ganze Elektrodenoberfläche mit Radium bedeckt; dann ergab sich für den Sättigungsstrom die Zahl 1244. Aus dem Verhältnisse der Sättigungsströme kann rückwärts die bei der ersten Beobachtungsreihe wirksame Elektrodenfläche berechnet werden. Sie ist gleich

$$\frac{313 \cdot 803}{1244} = 202.$$

Bei der Berechnung ist $Q = 200 \text{ qcm}$ angenommen.

III. Die Beobachtungsdaten und ihre Verwertung zur Berechnung von α/ϵ bei normalem Drucke.

§ 7. $[V, i]$ -Kurven in atmosphärischer Luft; der Sättigungsstrom als Funktion des Elektrodenabstandes.

Es wurde zuerst die Abhängigkeit der Stromstärke von der Elektrodenspannung und dem Elektrodenabstand für feuchte Luft untersucht; die Beobachtungen dauerten drei Wochen; die Druckschwankungen betrugen 745—754 mm, die Temperaturschwankungen 7—13°; es ergaben sich folgende Kurven und Tabellen (vgl. Fig. 2, Tab. 1).

Tabelle 1.

Abhängigkeit des Stromes von der Spannung.

Spannung in Volt ↓	Strom in Ampère $\times 10^{-8}$				
Elektroden- abstand in cm →	0,3	0,5	0,8	1,0	1,3
573,36	3,407	4,921	6,851	8,028	9,444
414,54	3,379		6,842	8,013	9,416
294,25	3,371	4,921	6,820	7,991	9,350
151,18	3,361	4,906	6,804	7,887	9,096
77,52	3,345	4,867	6,680	7,560	8,305
39,70	3,323	4,741	6,175	6,547	6,982
19,12	3,214	4,407	4,929	4,527	3,712
9,9	2,994	3,640		2,633	2,072
4,0	2,306				0,904
2,042	1,527			0,645	0,484
2,042				0,6391	0,484
1,021				0,3293	0,248
0,816	0,7142	0,5073			
0,408	0,3792	0,2583	0,1664	0,1332	0,0969
0,204	0,1921	0,1298	0,0832	0,06617	
573,36	3,356	4,945	6,944	8,1365	

Die Ströme, die unter der Linie stehen, sind an anderen Tagen gemessen wie die darüber stehenden.

Aus Tab. 1 folgt, daß der Sättigungsstrom langsamer wächst als der Elektrodenabstand. Die Ionisierungsstärke kann also keine Konstante sein, sondern muß als eine Funktion des Abstandes von der Oberfläche der mit Radium bestreuten Elektrode betrachtet werden.

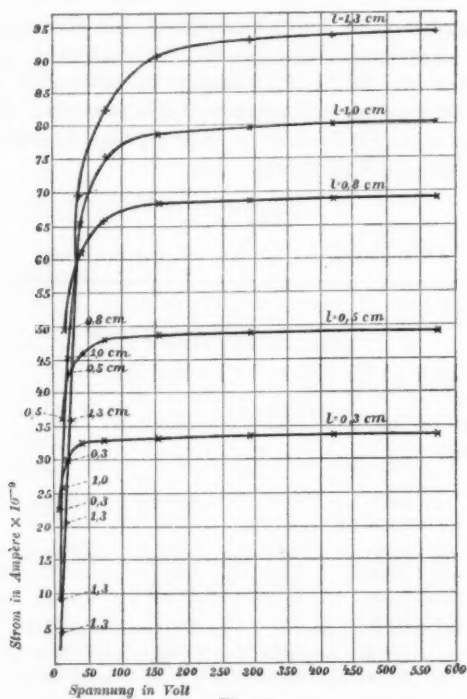


Fig. 2.

Man kann setzen¹⁾:

$$200 q \varepsilon = 200 q_0 \varepsilon e^{-a x},$$

dann wird der Sättigungsstrom

$$(d) \quad C = 200 \varepsilon \int_0^l q dx = \frac{q_0}{a} (1 - e^{-a l}) = 13,4 (1 - e^{-0,917 l}) \cdot 10^{-8}$$

1) Elektrodenquerschnitt $Q = 200$ qcm.

und

$$200 q \varepsilon = 12,29 e^{-0,917} \cdot 10^{-8},$$

die Konstanten q_0 und a sind aus den Sättigungsströmen für $l = 0,5$ cm und $l = 1,0$ cm berechnet; für andere Elektrodenabstände ergeben sich aus der Formel (d) die folgenden Werte:

Tabelle 2.

Sättigungsstrom in Ampère $\times 10^{-10}$.

Elektrodenabstand	1,3	1,0	0,8	0,5	0,3
Beobachtet . . .	944	803*	685	492*	341
Berechnet . . .	931	814	694	494	337
			695		321

Die Abweichungen sind ziemlich groß; die Aufnahme der sämtlichen Kurven der Tab. 1 erstreckte sich über einen Zeitraum von drei Wochen; als die Sättigungsströme für sich allein innerhalb einer Stunde gemessen wurden, ergaben sich besser übereinstimmende Zahlen.

Tabelle 3.

Sättigungsstrom im willkürlichen Maße in seiner Abhängigkeit vom Elektrodenabstand nach der Formel $C = \frac{q_0}{a} (1 - e^{-al})$ berechnet.

Elektrodenabstand	1,3	1,0	0,8	0,5	0,3
Beobachtet . . .	593	506*	438	309*	199
Berechnet . . .	589		436		202

§ 8. Abhängigkeit des Koeffizienten der Wiedervereinigung α von der Verteilung der Ionen im Gase.

Betrachtet man die Ionisierungsstärke q als eine Konstante, so gelten für den Sättigungsstrom die Gleichungen (VIII), § 3 I.

$$^+NF = \frac{q}{\nu U} x,$$

$$\bar{N}F = \frac{ql}{\nu V} - \frac{q}{\nu V} x,$$

daraus folgt

$$\int_0^l \dot{N} \bar{N} F^2 dx = \frac{q^2 l^3}{6 \nu^2 U V},$$

$$C - c = \alpha \varepsilon \int_0^l \dot{N} \bar{N} dx.$$

Man bekommt hiernach in erster Annäherung folgenden Ausdruck für α/ε :

$$(X) \quad \frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{6(C-c) \nu^2 U V F_0^2}{c^3 C}.$$

Setzt man den Beobachtungen entsprechend

$$q = q_0 e^{-\alpha x}, \quad c = \varepsilon \int_0^l q dx = \frac{\varepsilon q_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha l}),$$

so bekommt man nach Riecke die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= 4\pi\varepsilon(\dot{N} - \bar{N}), \\ \nu\varepsilon(U\dot{N} + V\bar{N})F &= c, \\ q &= \nu U \frac{d(\dot{N}F)}{dx} = -\nu V \frac{d(\bar{N}F)}{dx}, \\ \dot{N} - \bar{N} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{dF}{dx}, \\ U\dot{N} + V\bar{N} &= \frac{c}{\nu\varepsilon F}, \\ \dot{N} &= \frac{e}{\nu\varepsilon(U+V)F} + \frac{V}{4\pi\varepsilon(U+V)} \frac{dF}{dx}, \\ \bar{N} &= \frac{c}{\nu\varepsilon(U+V)F} - \frac{U}{4\pi\varepsilon(U+V)} \frac{dF}{dx}, \\ \frac{d}{dx} \left[\frac{c}{\nu\varepsilon(U+V)} + \frac{V}{4\pi\varepsilon(U+V)} F \frac{dF}{dx} \right] &= \frac{q}{\nu U}, \\ \frac{dF^2}{dx} = \frac{8\pi\varepsilon(U+V)}{\nu UV} \int q dx &= \frac{8\pi\varepsilon(U+V)}{\nu UV} \frac{q_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha x}) + c_1, \\ F^2 &= F_0^2 + c_1 x - \frac{8\pi\varepsilon(U+V)}{\nu UV} \frac{q_0}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha x}), \\ (\dot{N}F)_0 &= \frac{c}{\nu\varepsilon(U+V)} + \frac{V}{8\pi\varepsilon(U+V)} c_1 - \frac{q_0}{\alpha\nu U} = 0, \\ c_1 &= \frac{8\pi\varepsilon(U+V)q_0}{\alpha\nu UV} - \frac{8\pi\varepsilon(1 - e^{-\alpha l})q_0}{\alpha\nu V}. \end{aligned}$$

Mit Benutzung der numerischen Werte ergibt sich:

$$F^2 = F_0^2 + 0,23x - 0,095(1 - e^{-ax})x - 0,25(1 - e^{-ax}).$$

Für die Differenzen $F_0^2 - F_m^2$, wo F_m die Feldstärke in der Mitte zwischen den Elektroden bedeutet, ergeben sich folgende Werte:

Tabelle 4.

Elektrodenabstand	1,3	1,0	0,8	0,5	0,3
$F_0^2 - F_m^2$	0,012	0,005	0,005	0,0025	0,0005

Die absoluten Werte von F_0 im elektrostatischen Maße schwanken zwischen 1 und 0,033. Bei größeren Spannungen sind also die Differenzen $F_0^2 - F_m^2$ klein gegen die Werte F_0^2 selber, eine Bemerkung, die zu einer wesentlichen Vereinfachung der Rechnung führt. Aus den oben angegebenen Formeln folgt:

$${}^+N F = \frac{q_0}{a \nu U} (1 - e^{-ax}),$$

$$\bar{N} F = \frac{q_0}{a \nu V} (e^{-ax} - e^{-al}).$$

$$(t) \quad \int_0^l {}^+N \bar{N} F^2 dx = \frac{q_0^2}{2 a^3 \nu^2 U V} [1 - e^{-2al} - 2al e^{-al}].$$

$$C - c = a \varepsilon \int_0^l {}^+N \bar{N} dx.$$

Setzt man in die Formel (t) F_0 statt F , was bei größeren Spannungen erlaubt ist, so bekommt man schließlich in erster Annäherung folgenden Ausdruck für a/ε :

$$(X'') \quad \begin{cases} \frac{a}{\varepsilon} = \frac{2(C-c) \nu^2 U V F_0^2 a^3}{\varepsilon^2 q_0^2 (1 - e^{-2al} - 2al e^{-al})} \\ = \left[\frac{6(C-c) \nu^2 U V F_0^2}{\varepsilon^2 l} \right] \left[\frac{al(1 - 2e^{-al} + e^{-2al})}{3(1 - e^{-2al} - 2al e^{-al})} \right]. \end{cases}$$

Die Formel (X'') unterscheidet sich von der Formel (X) durch den Korrekturfaktor A_s ,

$$A_s = \frac{al(1 - e^{-al})^2}{3(1 - e^{-2al} - 2al e^{-al})},$$

der nur von dem Absorptionskoeffizienten α und dem Elektrodenabstand l abhängt. Setzt man den Beobachtungen entsprechend $\alpha = 0,917$, so bekommt man für A_e folgende Tabelle.

Tabelle 5.

Elektrodenabstand	1,3	1,0	0,8	0,5	0,3
A_e	1,04	1,02	1,06	1,02	1,04

Für die Methode der kleinen Ströme berechnet man (nach J. Stark) den Korrektionsfaktor A_{kl} in folgender Weise:

$$q = q_0 e^{-\alpha x} = \alpha N^2.$$

Für den beobachteten schwachen Strom gilt:

$$c = \varepsilon \nu N(U + V) \frac{dV}{dx},$$

wo dV/dx die Potentialgefälle bedeuten.

Für den Sättigungsstrom:

$$C = c + \varepsilon \int_0^l q dx = \frac{\varepsilon q_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha l}) + c,$$

$$V = \frac{c}{\varepsilon \nu (U + V)} \int_0^l \frac{dx}{N} = \frac{c}{\varepsilon \nu (U + V)} \int_0^l \frac{\alpha^{1/2}}{q_0^{1/2} e^{-\frac{\alpha x}{2}}} dx$$

$$= \frac{2 c \alpha^{1/2}}{\varepsilon \nu (U + V) q_0^{1/2} \alpha} \left(e^{\frac{\alpha l}{2}} - 1 \right),$$

$$(XVI) \left\{ \begin{aligned} \frac{\alpha}{\varepsilon} &= \frac{\varepsilon \nu^2 (U + V)^2 q_0 \alpha^2 V^2}{4 c^2 \left(e^{\frac{\alpha l}{2}} - 1 \right)^2} \\ &= \frac{(C - c) \nu^3 (U + V)^2 V^2}{c^2 l^3} \left[\frac{\alpha^3 l^3}{4 \left(e^{\frac{\alpha l}{2}} - 1 \right)^2 (1 - e^{-\alpha l})} \right]. \end{aligned} \right.$$

$$A_{kl} = \frac{\alpha^3 l^3}{4 \left(e^{\frac{\alpha l}{2}} - 1 \right)^2 (1 - e^{-\alpha l})}.$$

Die Tab. 6 gibt die Werte A_{kl} für verschiedene Elektrodenabstände wieder.

Tabelle 6.

Elektrodenabstand	1,3	1,0	0,8	0,5	0,3
d_{21}	0,927	0,952	0,988	0,978	0,955

Aus den Tabb. 5 und 6 folgt, daß der Koeffizient der Wiedervereinigung α in erster Annäherung als von der Verteilung der Ionen im Gase unabhängig zu betrachten ist. Für den Fall, daß während des Verschiebungsstromes keine neuen Ionen erzeugt werden, hat Langevin¹⁾ diesen Satz auf analytischem Wege aus den Grundgleichungen abgeleitet.

§ 9. Berechnung von α/s nach der Rieckeschen Methode.

Die Werte, die in Tab. 1 angegeben sind, wurden zur Berechnung von α/s nach der Rieckeschen Formel (X) benutzt; es ergaben sich Tabb. 7, 8, 9 und 10.

Tabelle 7.

$Q = 200$ qcm. $l = 1,3$ cm. $C = 945 \cdot 10^{-10}$ Amp.

V Volt	c Ampère	$\frac{C-c}{c^2}$	$\frac{(C-c)V^2}{c^2}$	$0,2 \frac{C-c}{c}$	$\frac{\alpha}{s}$
294	$935 \cdot 10^{-10}$	$114 \cdot 10^3$	$985 \cdot 10^7$	0,002	3901
151	$910 \cdot 10^{-10}$	$423 \cdot 10^3$	$964 \cdot 10^7$	0,008	3789
77,5	$831 \cdot 10^{-10}$	$165 \cdot 10^4$	$992 \cdot 10^7$	0,027	3821
39,7	$698 \cdot 10^{-10}$	$507 \cdot 10^4$	$801 \cdot 10^7$	0,071	2946

Tabelle 8.

$l = 1,0$ cm. $C = 803 \cdot 10^{-10}$ Amp.

V Volt	c Ampère	$\frac{C-c}{c^2}$	$\frac{(C-c)V^2}{c^2}$	$0,2 \frac{C-c}{c}$	$\frac{\alpha}{s}$
294	$799 \cdot 10^{-10}$	$627 \cdot 10^3$	$542 \cdot 10^7$	0,001	4718
151	$789 \cdot 10^{-10}$	$224 \cdot 10^3$	$511 \cdot 10^7$	0,004	4438
77,5	$756 \cdot 10^{-10}$	$823 \cdot 10^3$	$495 \cdot 10^7$	0,012	4264
39,7	$655 \cdot 10^{-10}$	$345 \cdot 10^4$	$545 \cdot 10^7$	0,045	4534
19,1	$453 \cdot 10^{-10}$	$171 \cdot 10^5$	$624 \cdot 10^7$	0,105	4595
9,9	$263 \cdot 10^{-10}$	$779 \cdot 10^5$	$763 \cdot 10^7$	0,410	3924

1) P. Langevin, Thèses présentées à la faculté des sciences de l'université de Paris 1902. p. 115.

Tabelle 9.

$$l = 0,8 \text{ cm. } C = 685 \cdot 10^{-10} \text{ Amp.}$$

V Volt	c Ampère	$\frac{C-c}{c^2}$	$\frac{(C-c)V^2}{c^3}$	$0,2 \frac{C-c}{c}$	$\frac{\alpha}{\varepsilon}$
151	$680 \cdot 10^{-10}$	$108 \cdot 10^3$	$246 \cdot 10^7$	0,001	4182
77,5	$668 \cdot 10^{-10}$	$381 \cdot 10^3$	$229 \cdot 10^7$	0,005	3876
39,7	$617,5 \cdot 10^{-10}$	$176 \cdot 10^4$	$278 \cdot 10^7$	0,022	4624
19,1	$493 \cdot 10^{-10}$	$789 \cdot 10^4$	$288 \cdot 10^7$	0,078	4522

Tabelle 10.

$$l = 0,5 \text{ cm. } C = 492 \cdot 10^{-10} \text{ Amp.}$$

V Volt	c Ampère	$\frac{C-c}{c^2}$	$\frac{(C-c)V^2}{c^3}$	$0,2 \frac{C-c}{c}$	$\frac{\alpha}{\varepsilon}$
77,5	$487 \cdot 10^{-10}$	$211 \cdot 10^3$	$127 \cdot 10^7$	0,002	8864
39,7	$474 \cdot 10^{-10}$	$802 \cdot 10^3$	$127 \cdot 10^7$	0,008	8795
19,1	$441 \cdot 10^{-10}$	$263 \cdot 10^4$	$96,0 \cdot 10^7$	0,023	6547
9,9	$364 \cdot 10^{-10}$	$967 \cdot 10^4$	$94,8 \cdot 10^7$	0,070	6017

Die in diesen vier Tabellen enthaltenen Zahlen sind von ungleichem Gewichte; die Fehler der berechneten Werte werden einmal um so größer sein, je kleiner das Verhältnis $\frac{C-c}{c}$, andererseits um so größer, je größer das Korrektionsglied $0,2 \frac{C-c}{c}$. Es mögen daher alle Werte von $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ausgeschlossen werden, bei denen $\frac{C-c}{c} < 0,01$, andererseits alle diejenigen, bei denen $0,2 \frac{C-c}{c} > 0,10$. Von den Werten der letzten Tabelle bleiben dann nur $\alpha/\varepsilon = 8795, 6547, 6017$ übrig. Diese Werte sind um so viel größer als die der übrigen Tabellen, daß sie durch einen störenden Umstand beeinflußt sein müssen. In erster Linie kann hier an die Wirkung der Adsorption gedacht werden. Bestätigt wird diese Vermutung durch die Ergebnisse der bei einem Elektrodenabstand von 0,3 cm angestellten Versuche; hier wuchsen die für α/ε berechneten Werte bis auf $\alpha/\varepsilon = 9660, 52600, 59200, 40000$. Schließt man die Werte der Tab. 10 aus, so ergibt sich die folgende Zusammenstellung.

Tabelle 11.

Elektrodenabstand	1,3	1,0	0,8
Werte von $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ {	3790	4440	3880
	3820	4260	4620
	2900	4530	4520
Mittel	3550	4410	4340

Als Mittel aus diesen drei Werten ergibt sich

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} = 4090.$$

Die Annahme bei der Ableitung der Formel (X) war, daß die Feldstärke im Innern des Gases als konstant betrachtet werden kann; die Abweichungen von dieser Annahme lassen sich mit Hilfe der Formel (IX) schätzen; es sei F_m die Feldstärke in der Mitte zwischen den Elektroden, $q_m = C/\varepsilon l Q$ die mittlere Ionisierungsstärke, wo Q den Elektrodenquerschnitt darstellt; dann wird aus der Formel (IX), wenn wir uns auf die ersten drei Glieder beschränken:

$$F_m^2 = F_0^2 - 0,046 q_m l^2 \cdot 10^{-10} = F_0^2 - 0,046 \frac{Cl}{\varepsilon Q} \cdot 10^{-10}.$$

Für die Werte der Tab. 1 bekommen wir:

Tabelle 12.

Elektrodenabstand	1,3	1,0	0,8	0,5	0,3
$F_0^2 - F_m^2$. . .	0,0181	0,0118	0,0081	0,0036	0,0015

Die absoluten Werte von F_0 im elektrostatischen Maße schwanken zwischen 1 und 0,033. Bei größeren Spannungen sind also die Differenzen $F_0^2 - F_m^2$ klein gegen die Werte von F_0^2 selber. Bei kleineren Spannungen kann der Fehler von Bedeutung sein.

§ 10. Berechnung von α/ε nach der Methode der kleinen Stromstärke.

Die Tab. 13 gibt die Werte für α/ε , aus Formel (XVI)

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{(U + V)^2 \nu^2 F^2}{l^3} \cdot \frac{C - c}{c^2}$$

bei Benutzung der Zahlen der Tab. 1 berechnet. Für c sind diejenigen Ströme genommen, die bei der Spannung 0,408 Volt beobachtet wurden.

Tabelle 13.

Elektrodenabstand l	1,3	1,0	0,8	0,5	0,3
$K(C-c) \cdot 10^8$. .	93,47	80,03	67,78	46,87	29,77
l^3	2,2	1	0,512	0,125	0,027
$c^2 \cdot 10^8$	0,00941	0,0177	0,0276	0,0666	0,144
$\frac{\alpha}{\varepsilon}$	4515	4521	4796	5630	7657

$$Q = 200 \text{ qcm}, \quad (U+V)^2 v^2 = 81 \cdot 10^4,$$

$$F^2 l^2 = \left(\frac{0,408}{300}\right)^2 = 185 \cdot 10^{-8}, \quad (U+V)^2 v^2 F_0^2 l^3 = 1,5,$$

$$K = \frac{(U+V)^2 v^2 F_0^2 l^3 Q}{30} = 10.$$

$$\frac{C \cdot 10^{-8}}{Q} \text{ bez. } \frac{c \cdot 10^{-8}}{Q} \text{ sind Stromdichten in Ampère,}$$

$$\frac{C \cdot 30}{Q} \text{ bez. } \frac{c \cdot 30}{Q} \text{ sind Stromdichten in elektrostatischem Maße,}$$

$$\frac{\frac{C \cdot 30}{Q} - \frac{c \cdot 30}{Q}}{\frac{c^2 \cdot 30^2}{Q^2}} = \frac{C-c}{c^2} \cdot \frac{Q}{30}.$$

IV. Abhängigkeit des Koeffizienten α/ε vom Drucke.

§ 11. $[i, p]$ -Kurven bei verschiedenen Elektrodenspannungen.

Die Abhängigkeit des Koeffizienten der Wiedervereinigung α vom Drucke wurde nach der Methode der kleinen Stromstärken untersucht.

Es werden zuerst Kurven aufgenommen, welche die Abhängigkeit des Stromes vom Drucke¹⁾ bei verschiedenen Spannungen angeben; die Figg. 3 u. 4 stellen solche Kurven²⁾ für den Elektrodenabstand 1 cm dar.

1) Der Druck in Millimeter Quecksilber wurde mit Hilfe eines Kathetometers gemessen.

2) Bei diesen Versuchen war Elektrodenquerschnitt $Q = 313 \text{ qcm}$.

Der Sättigungsstrom stellt nahezu eine Gerade dar; q wächst also dem Drucke proportional; für kleine Spannungen ist dagegen ein Maximum vorhanden in dem Bereiche, wo der Strom dem gesättigten Zustande sich nähert.

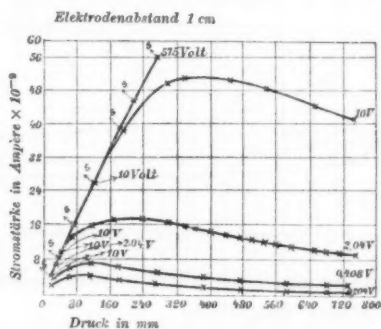


Fig. 3.

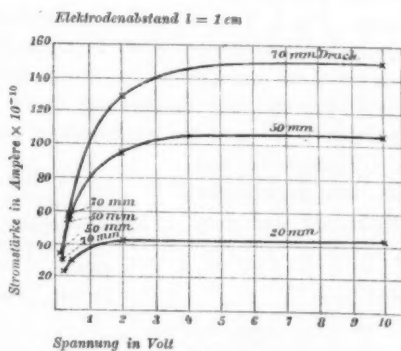


Fig. 4.

Setzen wir in den Formeln (XIII) und (XIV)

$$q = m p, \quad v(U + V) = \frac{n}{p},$$

wo p der Druck, m und n Proportionalitätsfaktoren sind, so ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{\alpha}{s} = \frac{v^2 (U + V)^2 C F_0^2}{c^2 l}$$

eine Kurve dritter Ordnung:

$$p c^2 = \frac{e^2 n^2 m F_0^2}{\alpha} = \text{Konst.}$$

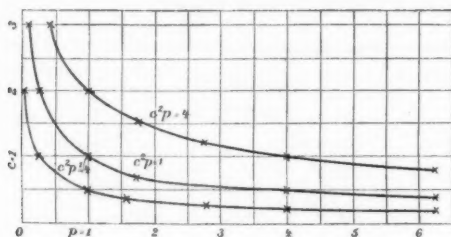


Fig. 3'. Theoretische Kurve $c^2 p = \text{Konst.}$

Der Zusammenhang zwischen c und p wird daher durch eine Kurve dritten Grades dargestellt.

In der Fig. 5 ist die Kurve für $l = 0,3$ cm den Beobachtungen entsprechend angegeben.

Aus der Kurve (Fig. 5, Tab. 14), die den Sättigungsstrom für 0,3 cm darstellt (Feldstärke etwa 1700 Volt pro Zentimeter), ist ersichtlich, daß bei 63 mm Druck der Strom aufhört, rein unselbständig¹⁾ zu sein und die Ionisierung durch Stoß eintritt; die Kurve steigt rapid und bei Evakuierung unter 20 mm stellt sich ein Glimmstrom und unter Umständen ein Lichtbogen zwischen der Elektrode und dem Schutzring her.

Tabelle 14'.

Spannung 575 Volt.
Elektrodenabst. 0,3 cm.

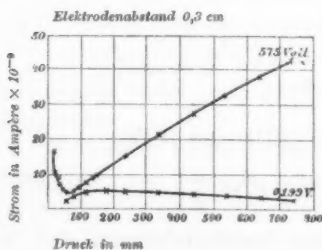


Fig. 5.

Druck in mm	Strom in Amp.
	10^{-8}
95,7	0,613
62,8	0,418
38,3	0,393
36,7	0,403
34,6	0,414
28,3	0,600
23,7	0,914
21,4	1,053
20,0	1,034

1) J. Stark, Die Elektrizität in Gasen p. 118 u. 119; Ann. d. Phys. 4. p. 402. 1901.

Tabelle 14.

Abhängigkeit der Ströme vom Druck bei verschiedenen Spannungen. Stromstärke in Ampère $\times 10^{-9}$.

Druck in mm \rightarrow	Elektrodenabstand in Zentimeter											
	0,3				0,5				1,0			
	600	0,1986	0,0993		600	0,398	0,199		600	9,9	2,04	1,3
Spannung in Volt \rightarrow												
700	4,098	0,310	0,155		6,480	0,397	0,201		11,87	4,332	1,007	0,215
650	3,843	0,324	0,162		6,075	0,421	0,213		11,28	4,486	1,072	0,230
600	3,576	0,339	0,170		5,673	0,448	0,226		10,60	4,654	1,143	0,249
550	3,312	0,356	0,180		5,274	0,473	0,240		9,91	4,818	1,214	0,269
500	3,033	0,371	0,189		4,853	0,500	0,254		9,20	4,936	1,292	0,288
450	2,752	0,386	0,197		4,424	0,529	0,269		8,48	5,050	1,375	0,314
400	2,468	0,403	0,208		3,956	0,559	0,283		7,72	5,081	1,457	0,344
350	2,180	0,422	0,220		3,474	0,591	0,305		6,92	5,107	1,544	0,380
300	1,880	0,436	0,229		2,990	0,623	0,328		6,08	4,995	1,635	0,420
250	1,576	0,449	0,234		2,510	0,654	0,352		5,19	4,505	1,690	0,462
200	1,262	0,454	0,241		2,025	0,685	0,376		4,27	3,936	1,706	0,512
150	0,944	0,432	0,236		1,521	0,661	0,384		3,230	3,170	1,674	0,559
100	0,685	0,364	0,207		1,012	0,632	0,390		2,175	2,140	1,492	0,595
50	0,405	0,210	0,131		0,510	0,390	0,273		1,090	1,040	0,980	0,570
												0,232
												0,460
												0,493
												0,531
												0,578
												0,626
												0,678
												0,731
												0,801
												0,873
												0,942
												1,013
												1,037
												1,048
												1,250
												0,873

Die Tab. 14 gibt die Werte der Ströme für $l = 0,3, 0,5, 1,0$ und $1,3$ cm wieder (graphisch interpoliert).

§ 12. Der Koeffizient α als Funktion des Druckes.

Die Werte aus der Tab. 14 sind in die Formel (XVI) eingesetzt; die so gewonnenen Werte für α/ε sind in Fig. 6 und Tab. 15 angegeben.¹⁾

Tabelle 15.

Abhängigkeit α/ε vom Druck.

Druck in mm ↓	Elektrodenabstand in cm			
	1,3	1,0	0,5	0,3
700	4004	4347	5199	6464
650	3797	4220	5002	6417
600	3625	3988	4854	6321
550	3400	3735	4740	6168
500	3271	3545	4690	6157
450	3055	3397	4658	6276
400	2977	3376	4707	6292
350	2787	3218	4559	6381
300	2693	3091	4510	6755
250	2598	3025	4559	
200	2606	3081	4789	

Die auch hier wieder hervortretende Abhängigkeit von α/ε vom Elektrodenabstand läßt sich in folgender Weise erklären.

Die elektrischen Ladungen, die der Sättigungsstrom wegführt, verschwinden in dreifacher Weise: durch Wiedervereinigung $\left(\alpha \int_0^l N^2 dx\right)$, durch den kleinen Strom (c) und durch die Adsorption an den Elektroden (D). Für einen sehr schwachen Strom (c) gelten die Gleichungen:

$$C = \alpha \varepsilon \int_0^l N^2 dx + c + D,$$

$$c = \varepsilon N(U + V)F.$$

Aus der Formel (XVI) wird jetzt:

$$(XVI'') \quad \frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{(C - c - D)(U + V)^2 \nu^2 F^2}{c^3 l}.$$

1) Die Werte für $(U + V)p$ sind aus „Die Elektrizität in Gasen“ von J. Stark p. 261.

Eine einfache Rechnung zeigt folgendes: Wenn wir in die Formel (XVII') für D folgende Werte setzen:

$D = 45$	elektrostatische Einheiten bei	$l = 0,3$ cm
43,2	"	" " $l = 0,5$ "
28,2	"	" " $l = 1,0$ "

so ergibt sich bei 700 mm Druck für alle Elektrodenabstände (0,3, 0,5, 1,0, 1,3) derselbe Wert $\alpha/\varepsilon = 4000$. Für den Fall $l = 1,0$ cm werden danach in einer Sekunde $C = 11,87 \cdot 10^{-8}$ Amp. oder 356 elektrostatische Einheiten in 313 ccm entstehen und 28,2 Einheiten von den Elektroden adsorbiert.

Daraus, daß die Kurven für 0,3 und 0,5 cm sich voneinander sehr bedeutend unterscheiden und die für 1,0 und 1,3 cm ziemlich nahe liegen, scheint zu folgen, daß bei der Vergrößerung des Elektrodenabstandes die durch Adsorption beeinflussten Kurven schnell nach den von diesem Einfluß freien konvergieren, und daß die Kurve für $l = 1,3$ cm die Abhängigkeit des Koeffizienten α/ε vom Druck nahezu wiedergibt. Man kann versuchen, zu den unbeeinflussten Kurven auf dem Wege einer graphischen Extrapolation zu kommen; man muß zu diesem Zwecke die Kurven konstruieren, die bei konstantem Drucke die zusammengehörenden Werte des Elektrodenabstandes und der Werte α/ε darstellen. Diese Kurven sind in Fig. 7 gezeichnet. Ihre Verlängerung gibt dann die Werte von α/ε für unendlich großen Elektrodenabstand.

§ 13. Die Resultate der Beobachtungen und ihre Vergleichung mit denen früherer Versuche.

Die Figg. 6 und 7 geben die Abhängigkeit des Koeffizienten α/ε vom Druck und Elektrodenabstand wieder.

Aus der Kurve für 1,3 cm (Fig. 6), die die Abhängigkeit α/ε vom Druck darstellt, ergibt sich, daß α/ε für 760 mm Druck gleich 4320 ist und bei der Erniedrigung des Druckes auf 100 mm um 380 (etwa um 10 Proz.) im Bereiche 700 bis 375 mm, und um 200 im Bereiche 375 bis 250 mm sinkt. Da bei Vergrößerung des Elektrodenabstandes der absolute Wert für α/ε sinkt und das Gefälle ($d\alpha/dp$) wächst, so ist anzunehmen, daß der wirkliche Wert für 760 mm etwas unter 4320 (die graphische Extrapolation gibt 4200) ist, und das Gefälle ($d\alpha/dp$) bei der Erniedrigung des Druckes etwas über 380; das wider-

spricht nicht den Resultaten von Langevin, wie aus der Tab. 16 ersichtlich ist.

Tabelle 16.

Beobachter	$\frac{\alpha}{\varepsilon}$ für 760 mm	Gefälle $\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\alpha}{dp}$ auf 100 mm zwischen 760 bis 375	Gefälle $\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\alpha}{dp}$ auf 100 mm zwischen 375 bis 250
Langevin	3200	462	375
Retschinsky	beobachtet für $l = 1,3$ cm	4320	380
	extrapoliert für $l = \text{groß}$	4200	414
			200
			—

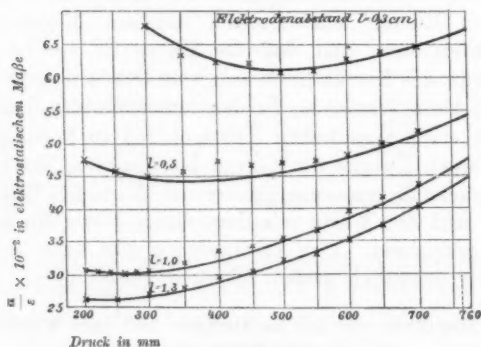


Fig. 6.

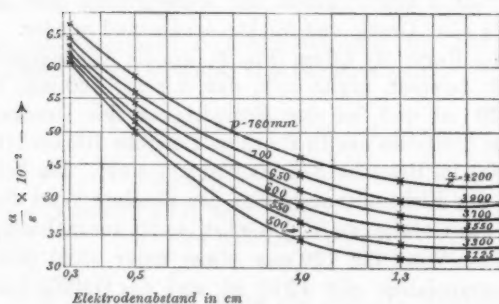


Fig. 7.

McClung¹⁾ hat für α/ε den Wert (aus der Formel (VI) berechnet) 3384 bekommen, der mit dem Druck sich nicht änderte. Der Apparat von McClung besteht aus elf parallelen Elektroden, deren äußerste im Abstände von 20 cm sich befinden; bei solcher Anordnung ist wahrscheinlich, daß die Adsorption auf seine Messungen einen merklichen Einfluß übt; es ist also N_0^2 zu klein genommen und α zu groß; da der bei Erniedrigung des Druckes durch Adsorption bedingte Fehler wächst, so kann es kommen, daß die Abnahme des Wertes von α/ε mit dem Drucke durch das Wachsen des Fehlers kompensiert wird; der Fehler hat, wie aus der Formel (VI) folgt, den dazu erforderlichen Sinn.

Walker²⁾ hat nach den experimentell ermittelten Werten von McClung α/ε nach Formeln berechnet, die sich als Spezialisierung der Formel (V) darstellen. Zwar erweisen die Zahlen, nach drei verschiedenen Formeln ausgerechnet, keine Übereinstimmung miteinander, doch zeigen die Werte jeder Formel für sich genommen deutlich, daß α/ε bei Erniedrigung des Druckes abnimmt. McClung³⁾ selbst mißt den von Walker berechneten Werten keine Bedeutung bei, da seine Versuchsanordnung nicht geeignet war, absolute Werte zu erhalten; die Messungen waren nur dafür bestimmt, die Gültigkeit der Gleichung (V) zu prüfen. Dazu brauchte er nur relative Werte.

Resultate.

I. Der Koeffizient der Wiedervereinigung (Molisierungskoeffizient) kann nach der Rieckeschen Methode des nahezu gesättigten Stromes und nach der Methode der kleinen Stromstärke bestimmt werden. Nach der Rieckeschen Methode ergibt sich in Luft von atmosphärischem Druck (745–754) der Mittelwert $\alpha/\varepsilon = 4090$; nach der Methode der kleinen Ströme von Stark $\alpha/\varepsilon = 4200$ (Druck 760 mm).

II. Bei kleinem Elektrodenabstand darf neben der Wiedervereinigung der Ionen ihre Adsorption an den Elektrodenoberflächen nicht vernachlässigt werden.

1) McClung, Phil. Mag. 3. p. 283. 1902.

2) G. W. Walker, Phil. Mag. 44. p. 206. 1904.

3) McClung, Phil. Mag. 44. p. 211. 1904.

III. Der Koeffizient α/ϵ nimmt ab mit sinkendem Druck in dem Bereiche 760 bis 200 mm im Mittel um 300 auf 100 mm.

Ich erfülle eine Pflicht, wenn ich zum Schlusse Hrn. Prof. Riecke meinen herzlichen Dank für die Anregung und Förderung ausspreche, die er mir stets hat zuteil werden lassen; auch Hrn. Dr. J. Stark bin ich zu Dankbarkeit verpflichtet für Anregung und Unterstützung während meiner Arbeit.

(Eingegangen 6. Juni 1905.)

5. *Über die von der molekularkinetischen Theorie
der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden
Flüssigkeiten suspendierten Teilchen;
von A. Einstein.*

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekularkinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten „Brownischen Molekularbewegung“ identisch sind; die mir erreichbaren Angaben über letztere sind jedoch so ungenau, daß ich mir hierüber kein Urteil bilden konnte.

Wenn sich die hier zu behandelnde Bewegung samt den für sie zu erwartenden Gesetzmäßigkeiten wirklich beobachten läßt, so ist die klassische Thermodynamik schon für mikroskopisch unterscheidbare Räume nicht mehr als genau gültig anzusehen und es ist dann eine exakte Bestimmung der wahren Atomgröße möglich. Erwies sich umgekehrt die Voraussage dieser Bewegung als unzutreffend, so wäre damit ein schwerwiegendes Argument gegen die molekularkinetische Auffassung der Wärme gegeben.

§ 1. *Über den suspendierten Teilchen zuzuschreibenden
osmotischen Druck.*

Im Teilvolumen V^* einer Flüssigkeit vom Gesamtvolumen V seien z -Gramm-Moleküle eines Nichteлектроlyten gelöst. Ist das Volumen V^* durch eine für das Lösungsmittel, nicht aber für die gelöste Substanz durchlässige Wand vom reinen Lösungs-

mittel getrennt, so wirkt auf diese Wand der sogenannte osmotische Druck, welcher bei genügend großen Werten von V^*/z der Gleichung genügt:

$$p V^* = R T z.$$

Sind hingegen statt der gelösten Substanz in dem Teilvolumen V^* der Flüssigkeit kleine suspendierte Körper vorhanden, welche ebenfalls nicht durch die für das Lösungsmittel durchlässige Wand hindurchtreten können, so hat man nach der klassischen Theorie der Thermodynamik — wenigstens bei Vernachlässigung der uns hier nicht interessierenden Schwerkraft — nicht zu erwarten, daß auf die Wand eine Kraft wirke; denn die „freie Energie“ des Systems scheint nach der üblichen Auffassung nicht von der Lage der Wand und der suspendierten Körper abzuhängen, sondern nur von den Gesamtmassen und Qualitäten der suspendierten Substanz, der Flüssigkeit und der Wand, sowie von Druck und Temperatur. Es kämen allerdings für die Berechnung der freien Energie noch Energie und Entropie der Grenzflächen in Betracht (Kapillarkräfte); hiervon können wir jedoch absehen, indem bei den ins Auge zu fassenden Lagenänderungen der Wand und der suspendierten Körper Änderungen der Größe und Beschaffenheit der Berührungsflächen nicht eintreten mögen.

Vom Standpunkte der molekularkinetischen Wärmetheorie aus kommt man aber zu einer anderen Auffassung. Nach dieser Theorie unterscheidet sich eingelöstes Molekül von einem suspendierten Körper *lediglich* durch die Größe, und man sieht nicht ein, warum einer Anzahl suspendierter Körper nicht derselbe osmotische Druck entsprechen sollte, wie der nämlichen Anzahl gelöster Moleküle. Man wird anzunehmen haben, daß die suspendierten Körper infolge der Molekularbewegung der Flüssigkeit eine wenn auch sehr langsame ungeordnete Bewegung in der Flüssigkeit ausführen; werden sie durch die Wand verhindert, das Volumen V^* zu verlassen, so werden sie auf die Wand Kräfte ausüben, ebenso wie gelöste Moleküle. Sind also n suspendierte Körper im Volumen V^* , also $n/V^* = \nu$ in der Volumeneinheit vorhanden, und sind benachbarte unter ihnen genügend weit voneinander entfernt, so wird ihnen ein osmotischer Druck p entsprechen von der Größe:

$$p = \frac{RT}{V^*} \frac{n}{N} = \frac{RT}{N} \cdot \nu,$$

wobei N die Anzahl der in einem Gramm-Molekül enthaltenen wirklichen Moleküle bedeutet. Im nächsten Paragraph soll gezeigt werden, daß die molekularkinetische Theorie der Wärme wirklich zu dieser erweiterten Auffassung des osmotischen Druckes führt.

§ 2. Der osmotische Druck vom Standpunkte der molekularkinetischen Theorie der Wärme.¹⁾

Sind $p_1 p_2 \dots p_l$ Zustandsvariable eines physikalischen Systems, welche den momentanen Zustand desselben vollkommen bestimmen (z. B. die Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten aller Atome des Systems) und ist das vollständige System der Veränderungsgleichungen dieser Zustandsvariablen von der Form

$$\frac{\partial p_v}{\partial t} = \varphi_v(p_1 \dots p_l) \quad (v = 1, 2 \dots l)$$

gegeben, wobei $\sum \frac{\partial \varphi_v}{\partial p_v} = 0$, so ist die Entropie des Systems durch den Ausdruck gegeben:

$$S = \frac{\bar{E}}{T} + 2\pi \lg \int e^{-\frac{E}{2\pi T}} dp_1 \dots dp_l.$$

Hierbei bedeutet T die absolute Temperatur, \bar{E} die Energie des Systems, E die Energie als Funktion der p_v . Das Integral ist über alle mit den Bedingungen des Problems vereinbaren Wertekombinationen der p_v zu erstrecken. π ist mit der oben erwähnten Konstanten N durch die Relation $2\pi N = R$ verbunden. Für die freie Energie F erhalten wir daher:

$$F = -\frac{R}{N} T \lg \int e^{-\frac{EN}{RT}} dp_1 \dots dp_l = -\frac{RT}{N} \lg B.$$

1) In diesem Paragraph sind die Arbeiten des Verfassers über die Grundlagen der Thermodynamik als bekannt vorausgesetzt (vgl. Ann. d. Phys. 9. p. 417. 1902; 11. p. 170. 1903). Für das Verständnis der Resultate der vorliegenden Arbeit ist die Kenntnis jener Arbeiten sowie dieses Paragraphen der vorliegenden Arbeit entbehrlich.

Wir denken uns nun eine in dem Volumen V eingeschlossene Flüssigkeit; in dem Teilvolumen V^* von V mögen sich n gelöste Moleküle bez. suspendierte Körper befinden, welche im Volumen V^* durch eine semipermeable Wand festgehalten seien; es werden hierdurch die Integrationsgrenzen des in den Ausdrücken für S und F auftretenden Integrales B beeinflußt. Das Gesamtvolumen der gelösten Moleküle bez. suspendierten Körper sei klein gegen V^* . Dies System werde im Sinne der erwähnten Theorie durch die Zustandsvariabeln $p_1 \dots p_i$ vollständig dargestellt.

Wäre nun auch das molekulare Bild bis in alle Einzelheiten festgelegt, so böte doch die Ausrechnung des Integrales B solche Schwierigkeiten, daß an eine exakte Berechnung von F kaum gedacht werden könnte. Wir brauchen jedoch hier nur zu wissen, wie F von der Größe des Volumens V^* abhängt, in welchem alle gelösten Moleküle bez. suspendierten Körper (im folgenden kurz „Teilchen“ genannt) enthalten sind.

Wir nennen x_1, y_1, z_1 die rechtwinkligen Koordinaten des Schwerpunktes des ersten Teilchens, x_2, y_2, z_2 die des zweiten etc., x_n, y_n, z_n die des letzten Teilchens und geben für die Schwerpunkte der Teilchen die unendlich kleinen parallelepipedförmigen Gebiete $dx_1 dy_1 dz_1, dx_2 dy_2 dz_2 \dots dx_n dy_n dz_n$, welche alle in V^* gelegen seien. Gesucht sei der Wert des im Ausdruck für F auftretenden Integrales mit der Beschränkung, daß die Teilchenschwerpunkte in den ihnen soeben zugewiesenen Gebieten liegen. Dies Integral läßt sich jedenfalls auf die Form

$$dB = dx_1 dy_1 \dots dz_n \cdot J$$

bringen, wobei J von $dx_1 dy_1$ etc., sowie von V^* , d. h. von der Lage der semipermeablen Wand, unabhängig ist. J ist aber auch unabhängig von der speziellen Wahl der Lagen der Schwerpunktsgebiete und von dem Werte von V^* , wie sogleich gezeigt werden soll. Sei nämlich ein zweites System von unendlich kleinen Gebieten für die Teilchenschwerpunkte gegeben und bezeichnet durch $dx'_1 dy'_1 dz'_1, dx'_2 dy'_2 dz'_2 \dots dx'_n dy'_n dz'_n$, welche Gebiete sich von den ursprünglich gegebenen nur durch ihre Lage, nicht aber durch ihre Größe unterscheiden mögen und ebenfalls alle in V^* enthalten seien, so gilt analog:

$$dB' = dx'_1 dy'_1 \dots dz'_n \cdot J',$$

wobei

$$dx_1 dy_1 \dots dz_n = dx'_1 dy'_1 \dots dz'_n.$$

Es ist also:

$$\frac{dB}{dB'} = \frac{J}{J'}.$$

Aus der in den zitierten Arbeiten gegebenen molekularen Theorie der Wärme läßt sich aber leicht folgern¹⁾, daß dB/B bez. dB'/B gleich ist der Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich in einem beliebig herausgegriffenen Zeitpunkte die Teilchenschwerpunkte in den Gebieten $(dx_1 \dots dz_n)$ bez. in den Gebieten $(dx'_1 \dots dz'_n)$ befinden. Sind nun die Bewegungen der einzelnen Teilchen (mit genügender Annäherung) voneinander unabhängig, ist die Flüssigkeit homogen und wirken auf die Teilchen keine Kräfte, so müssen bei gleicher Größe der Gebiete die den beiden Gebietssystemen zukommenden Wahrscheinlichkeiten einander gleich sein, so daß gilt:

$$\frac{dB}{B} = \frac{dB'}{B'}.$$

Aus dieser und aus der zuletzt gefundenen Gleichung folgt aber

$$J = J'.$$

Es ist somit erwiesen, daß J weder von V^* noch von $x_1, y_1 \dots z_n$ abhängig ist. Durch Integration erhält man

$$B = \int J dx_1 \dots dz_n = J V^{*n}$$

und daraus

$$F = - \frac{RT}{N} \{ \lg J + n \lg V^* \}$$

und

$$p = - \frac{\partial F}{\partial V^*} = \frac{RT}{V^*} \frac{n}{N} = \frac{RT}{N} \nu.$$

Durch diese Betrachtung ist gezeigt, daß die Existenz des osmotischen Druckes eine Konsequenz der molekularkinetischen Theorie der Wärme ist, und daß nach dieser Theorie gelöste Moleküle und suspendierte Körper von gleicher Anzahl sich in bezug auf osmotischen Druck bei großer Verdünnung vollkommen gleich verhalten.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 11. p. 170. 1903.

§ 3. Theorie der Diffusion kleiner suspendierter Kugeln.

In einer Flüssigkeit seien suspendierte Teilchen regellos verteilt. Wir wollen den dynamischen Gleichgewichtszustand derselben untersuchen unter der Voraussetzung, daß auf die einzelnen Teilchen eine Kraft K wirkt, welche vom Orte, nicht aber von der Zeit abhängt. Der Einfachheit halber werde angenommen, daß die Kraft überall die Richtung der X -Achse habe.

Es sei ν die Anzahl der suspendierten Teilchen pro Volumeneinheit, so ist im Falle des thermodynamischen Gleichgewichtes ν eine solche Funktion von x , daß für eine beliebige virtuelle Verrückung δx der suspendierten Substanz die Variation der freien Energie verschwindet. Man hat also:

$$\delta F = \delta E - T \delta S = 0.$$

Es werde angenommen, daß die Flüssigkeit senkrecht zur X -Achse den Querschnitt 1 habe und durch die Ebenen $x=0$ und $x=l$ begrenzt sei. Man hat dann:

$$\delta E = - \int_0^l K \nu \delta x dx$$

und

$$\delta S = \int_0^l R \frac{\nu}{N} \frac{\partial \delta x}{\partial x} dx = - \frac{R}{N} \int_0^l \frac{\partial \nu}{\partial x} \delta x dx.$$

Die gesuchte Gleichgewichtsbedingung ist also:

$$(1) \quad -K \nu + \frac{RT}{N} \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0$$

oder

$$K \nu - \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Die letzte Gleichung sagt aus, daß der Kraft K durch osmotische Druckkräfte das Gleichgewicht geleistet wird.

Die Gleichung (1) benutzen wir, um den Diffusionskoeffizienten der suspendierten Substanz zu ermitteln. Wir können den eben betrachteten dynamischen Gleichgewichtszustand als

die Superposition zweier in umgekehrtem Sinne verlaufender Prozesse auffassen, nämlich

1. einer Bewegung der suspendierten Substanz unter der Wirkung der auf jedes einzelne suspendierte Teilchen wirkenden Kraft K ,

2. eines Diffusionsvorganges, welcher als Folge der ungeordneten Bewegungen der Teilchen infolge der Molekularbewegung der Wärme aufzufassen ist.

Haben die suspendierten Teilchen Kugelform (Kugelradius P) und besitzt die Flüssigkeit den Reibungskoeffizienten k , so erteilt die Kraft K dem einzelnen Teilchen die Geschwindigkeit¹⁾

$$\frac{K}{6 \pi k P},$$

und es treten durch die Querschnittseinheit pro Zeiteinheit

$$\frac{\nu K}{6 \pi k P}$$

Teilchen hindurch.

Bezeichnet ferner D den Diffusionskoeffizienten der suspendierten Substanz und μ die Masse eines Teilchens, so treten pro Zeiteinheit infolge der Diffusion

$$- D \frac{\partial (\mu \nu)}{\partial x} \text{ Gramm}$$

oder

$$- D \frac{\partial \nu}{\partial x}$$

Teilchen durch die Querschnittseinheit. Da dynamisches Gleichgewicht herrschen soll, so muß sein:

$$(2) \quad \frac{\nu K}{6 \pi k P} - D \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0.$$

Aus den beiden für das dynamische Gleichgewicht gefundenen Bedingungen (1) und (2) kann man den Diffusionskoeffizienten berechnen. Man erhält:

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6 \pi k P}.$$

Der Diffusionskoeffizient der suspendierten Substanz hängt also

1) Vgl. z. B. G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 26. Vorlesung § 4.

außer von universellen Konstanten und der absoluten Temperatur nur vom Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit und von der Größe der suspendierten Teilchen ab.

§ 4. Über die ungeordnete Bewegung von in einer Flüssigkeit suspendierten Teilchen und deren Beziehung zur Diffusion.

Wir gehen nun dazu über, die ungeordneten Bewegungen genauer zu untersuchen, welche, von der Molekularbewegung der Wärme hervorgerufen, Anlaß zu der im letzten Paragraphen untersuchten Diffusion geben.

Es muß offenbar angenommen werden, daß jedes einzelne Teilchen eine Bewegung ausführe, welche unabhängig ist von der Bewegung aller anderen Teilchen; es werden auch die Bewegungen eines und desselben Teilchens in verschiedenen Zeitintervallen als voneinander unabhängige Vorgänge aufzufassen sein, solange wir diese Zeitintervalle nicht zu klein gewählt denken.

Wir führen ein Zeitintervall τ in die Betrachtung ein, welches sehr klein sei gegen die beobachtbaren Zeitintervalle, aber doch so groß, daß die in zwei aufeinanderfolgenden Zeitintervallen τ von einem Teilchen ausgeführten Bewegungen als voneinander unabhängige Ereignisse aufzufassen sind.

Seien nun in einer Flüssigkeit im ganzen n suspendierte Teilchen vorhanden. In einem Zeitintervall τ werden sich die X -Koordinaten der einzelnen Teilchen um Δ vergrößern, wobei Δ für jedes Teilchen einen anderen (positiven oder negativen) Wert hat. Es wird für Δ ein gewisses Häufigkeitsgesetz gelten; die Anzahl dn der Teilchen, welche in dem Zeitintervall τ eine Verschiebung erfahren, welche zwischen Δ und $\Delta + d\Delta$ liegt, wird durch eine Gleichung von der Form

$$dn = n \varphi(\Delta) d\Delta$$

ausdrückbar sein, wobei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta) d\Delta = 1$$

und φ nur für sehr kleine Werte von Δ von Null verschieden ist und die Bedingung

$$\varphi(\Delta) = \varphi(-\Delta)$$

erfüllt.

Wir untersuchen nun, wie der Diffusionskoeffizient von φ abhängt, wobei wir uns wieder auf den Fall beschränken, daß die Anzahl ν der Teilchen pro Volumeneinheit nur von x und t abhängt.

Es sei $\nu = f(x, t)$ die Anzahl der Teilchen pro Volumeneinheit, wir berechnen die Verteilung der Teilchen zur Zeit $t + \tau$ aus deren Verteilung zur Zeit t . Aus der Definition der Funktion $\varphi(\Delta)$ ergibt sich leicht die Anzahl der Teilchen, welche sich zur Zeit $t + \tau$ zwischen zwei zur X-Achse senkrechten Ebenen mit den Abszissen x und $x + dx$ befinden. Man erhält:

$$f(x, t + \tau) dx = dx \cdot \int_{\Delta = -\infty}^{\Delta = +\infty} f(x + \Delta) \varphi(\Delta) d\Delta.$$

Nun können wir aber, da τ sehr klein ist, setzen:

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Ferner entwickeln wir $f(x + \Delta, t)$ nach Potenzen von Δ :

$$f(x + \Delta, t) = f(x, t) + \Delta \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \dots \text{in inf.}$$

Diese Entwicklung können wir unter dem Integral vornehmen, da zu letzterem nur sehr kleine Werte von Δ etwas beitragen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} f + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \tau &= f \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta) d\Delta + \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \varphi(\Delta) d\Delta \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \varphi(\Delta) d\Delta \dots \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite verschwindet wegen $\varphi(x) = \varphi(-x)$ das zweite, vierte etc. Glied, während von dem ersten, dritten, fünften etc. Gliede jedes folgende gegen das vorhergehende sehr klein ist. Wir erhalten aus dieser Gleichung, indem wir berücksichtigen, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta) d\Delta = 1,$$

und indem wir

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2}{2} \varphi(\Delta) d\Delta = D$$

setzen und nur das erste und dritte Glied der rechten Seite berücksichtigen:

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Dies ist die bekannte Differentialgleichung der Diffusion, und man erkennt, daß D der Diffusionskoeffizient ist.

An diese Entwicklung läßt sich noch eine wichtige Überlegung anknüpfen. Wir haben angenommen, daß die einzelnen Teilchen alle auf dasselbe Koordinatensystem bezogen seien. Dies ist jedoch nicht nötig, da die Bewegungen der einzelnen Teilchen voneinander unabhängig sind. Wir wollen nun die Bewegung jedes Teilchens auf ein Koordinatensystem beziehen, dessen Ursprung mit der Lage des Schwerpunktes des betreffenden Teilchens zur Zeit $t = 0$ zusammenfällt, mit dem Unterschiede, daß jetzt $f(x, t) dx$ die Anzahl der Teilchen bedeutet, deren X -Koordinaten von der Zeit $t = 0$ bis zur Zeit $t = t$ um eine Größe *gewachsen* ist, welche zwischen x und $x + dx$ liegt. Auch in diesem Falle ändert sich also die Funktion f gemäß Gleichung (1). Ferner muß offenbar für $x \geq 0$ und $t = 0$

$$f(x, t) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dx = n$$

sein. Das Problem, welches mit dem Problem der Diffusion von einem Punkte aus (unter Vernachlässigung der Wechselwirkung der diffundierenden Teilchen) übereinstimmt, ist nun mathematisch vollkommen bestimmt; seine Lösung ist:

$$f(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi D}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

Die Häufigkeitsverteilung der in einer beliebigen Zeit t erfolgten Lagenänderungen ist also dieselbe wie die der zu-

falligen Fehler, was zu vermuten war. Von Bedeutung aber ist, wie die Konstante im Exponenten mit dem Diffusionskoeffizienten zusammenhängt. Wir berechnen nun mit Hilfe dieser Gleichung die Verrückung λ_x in Richtung der X -Achse, welche ein Teilchen im Mittel erfährt, oder — genauer ausgedrückt — die Wurzel aus dem arithmetischen Mittel der Quadrate der Verrückungen in Richtung der X -Achse; es ist:

$$\lambda_x = \sqrt{x^2} = \sqrt{2 D t}.$$

Die mittlere Verschiebung ist also proportional der Quadratwurzel aus der Zeit. Man kann leicht zeigen, daß die Wurzel aus dem Mittelwert der Quadrate der *Gesamtverschiebungen* der Teilchen den Wert $\lambda_x \sqrt{3}$ besitzt.

§ 5. Formel für die mittlere Verschiebung suspendierter Teilchen. Eine neue Methode zur Bestimmung der wahren Größe der Atome.

In § 3 haben wir für den Diffusionskoeffizienten D eines in einer Flüssigkeit in Form von kleinen Kugeln vom Radius P suspendierten Stoffes den Wert gefunden:

$$D = \frac{R T}{N} \frac{1}{6 \pi k P}.$$

Ferner fanden wir in § 4 für den Mittelwert der Verschiebungen der Teilchen in Richtung der X -Achse in der Zeit t :

$$\lambda_x = \sqrt{2 D t}.$$

Durch Eliminieren von D erhalten wir:

$$\lambda_x = \sqrt{t} \cdot \sqrt{\frac{R T}{N} \frac{1}{3 \pi k P}}.$$

Diese Gleichung läßt erkennen, wie λ_x von T , k und P abhängen muß.

Wir wollen berechnen, wie groß λ_x für eine Sekunde ist, wenn N gemäß den Resultaten der kinetischen Gastheorie 6.10^{23} gesetzt wird; es sei als Flüssigkeit Wasser von 17°C . gewählt ($k = 1,35 \cdot 10^{-2}$) und der Teilchendurchmesser sei 0,001 mm. Man erhält:

$$\lambda_x = 8 \cdot 10^{-5} \text{ cm} = 0,8 \text{ Mikron.}$$

Die mittlere Verschiebung in 1 Min. wäre also ca. 6 Mikron.

Umgekehrt läßt sich die gefundene Beziehung zur Bestimmung von N benutzen. Man erhält:

$$N = \frac{t}{k_e^2} \cdot \frac{RT}{8\pi k P}.$$

Möge es bald einem Forscher gelingen, die hier aufgeworfene, für die Theorie der Wärme wichtige Frage zu entscheiden!

Bern, Mai 1905.

(Eingegangen 11. Mai 1905.)

6. *Über das Röntgensche Absorptionsgesetz und seine Erklärung; von B. Walter.¹⁾*

In seiner dritten Mitteilung über die X-Strahlen hat Röntgen durch photometrische Messungen nachgewiesen, daß eine Röntgenstrahlung, die durch eine bestimmte Schicht Aluminium, Glas oder Stanniol hindurchgegangen ist, von einer zweiten, ebenso dicken Schicht desselben Stoffs zu einem erheblich größeren Bruchteile hindurchgelassen wird, als von der ersten. Mit anderen Worten heißt dies, daß die Strahlung nach dem Verlassen der ersten Schicht für den betreffenden Stoff ein erheblich größeres Durchdringungsvermögen erworben hat oder auch — wie wir heute gewöhnlich sagen — für ihn erheblich *härter* geworden ist als vorher.

Diese Tatsache will ich als das *Röntgensche Absorptionsgesetz* bezeichnen.

An derselben Stelle hat Röntgen dann auch für dieses eigenartige Verhalten seiner Strahlen eine *Erklärung* gegeben, die auch bisher allgemein als richtig angenommen wurde, und die im wesentlichen darauf hinausläuft, daß die Strahlung einer jeden Röhre aus *einem Gemisch von Strahlen verschiedener Härte* besteht. Diese Erklärung hat ja auch tatsächlich etwas unmittelbar Einleuchtendes, da die weicheren, d. h. weniger durchdringungsfähigen Teile eines solchen Strahlengemisches beim Durchgang durch irgend einen Körper natürlich relativ mehr abgeschwächt werden müssen als die härteren, so daß mithin in dem Gemisch *nach* dem Durchgang ein größerer Prozentsatz von harten Strahlen vorhanden sein muß als *vorher*.

Wenn nun aber diese Erklärung richtig sein soll, so muß die darin enthaltene Tatsache natürlich für *jeden beliebigen* Stoff gelten; und es ergibt sich denn auch aus der genannten Abhandlung Röntgens, daß derselbe an der Allgemeingültigkeit seines obengenannten Gesetzes nicht gezweifelt hat.

1) Etwas veränderter Abdruck aus den „Fortschritten auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen“ 8. p. 297. 1904/1905.

Versucht man nun aber, dasselbe in möglichst einfacher und direkter Weise dadurch zu demonstrieren, daß man die Härte der Strahlung irgend einer Röhre mit einer Härteskala nach dem Benoistschen System *einmal direkt und einmal nach dem Durchdringen eines beliebigen Stoffs* bestimmt, so wird man zwar für die meisten Metalle, wie Aluminium, Eisen, Kupfer, Zink, Platin, Blei etc. tatsächlich auch auf diese Weise eine unmittelbare Bestätigung jenes Gesetzes finden. Hält man dagegen bei diesen Versuchen ein Stück *Silberblech* vor die Skala, so zeigt sich die Feldnummer in derselben nicht — wie bei den soeben genannten Metallen — *erhöht*, sondern vielmehr *erniedrigt*; und in ähnlicher, wenn auch weniger ausgesprochener Weise wirken hierbei auch Bleche aus Palladium, Kadmium, Zinn und Antimon, Metalle, die übrigens hinsichtlich ihres Atomgewichtes dem Silber nahe stehen.

Alle diese Tatsachen lassen sich ferner nicht bloß *subjektiv* auf dem Leuchtschirm der in Rede stehenden Härteskala beobachten, sondern auch *objektiv* mit Hilfe der photographischen Platte nachweisen, wie hier durch die nachstehend in verkleinerter Form abgebildeten drei Aufnahmen, Figg. 1, 2 und 3, einer Härteskala nach dem Benoist-Walterschen System (B.-W.-Skala) dargetan werden mag.¹⁾ Von diesen Figuren ist zunächst die erste in der Weise gewonnen, daß bei ihr *nur* die B.-W.-Skala

1) Das mittlere Feld dieser Skala besteht — wie in der ursprünglichen Benoistschen Skala (B.-Skala) — aus einem 0,11 mm dicken Silberblech, die Zahl der äußeren Felder dagegen, die bei der letzteren 12 beträgt, ist in der ersteren auf 6 reduziert; und ferner sind die Aluminiumdicken in der ersteren nicht wie in der letzteren nach einer arithmetischen Reihe *erster*, sondern nach einer solchen *zweiter Ordnung* bemessen — nämlich statt 1, 2, 3, . . . 12 mm in der B.-Skala hier der Reihe nach gleich 2,0, 2,4, 3,2, 4,4, 6,0 und 8,0 mm genommen. Durch diese Änderung wird nämlich für die verschiedenen in der Praxis letztere gebräuchlichen Röhrenhärten eine nahezu gleichmäßige Abstufung der Feldhelligkeiten der Skala erreicht, wie ja auch die Aufnahmen zeigen. Die Härte der Röhre wird in diesen Skalen bekanntlich durch die Nummer desjenigen Außenfeldes bezeichnet, welches mit dem Mittelfeld gleich hell erscheint; und zwar wird die Numerierung wie bei der Uhr von oben aus nach rechts herum gerechnet. Die Nummern der B.-Skala und der B.-W.-Skala lassen sich übrigens, da das Mittelfeld bei beiden identisch ist, unmittelbar aufeinander reduzieren. (Näheres vgl. Fortschritte a. d. G. d. R. 6. p. 71. 1902/03.)

auf die in lichtdichtes Papier eingeschlagene und auf einer Bleiunterlage liegende photographische Platte gelegt war, während bei der zweiten unmittelbar vor der Skala noch eine 6,0 mm dicke *Aluminiumschicht* und bei der dritten statt ihrer eine 0,11 mm dicke *Silberplatte* in den Gang der Strahlen eingeschaltet war. Die Härte der Röntgenröhre wurde bei allen drei Aufnahmen in gewöhnlicher Weise mit einer zweiten B.-W.-Skala fortwährend überwacht und durch passende Wahl der Belastung die ganze Zeit hindurch konstant gehalten. Sie war, wie ja auch aus der Fig. 1 hervorgeht, gleich 5 B.-W.; denn das Mittelfeld dieser Aufnahme erscheint gleich dunkel mit dem fünften Außenfelde der Skala. Demgegenüber zeigen nun aber die Figg. 2 und 3, daß die nach dieser Methode gemessene Härte derselben Strahlung einerseits nach dem Durchgange durch

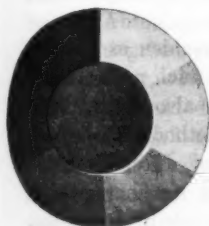


Fig. 1.

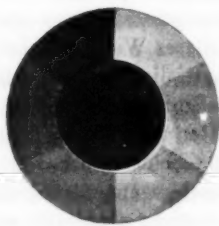


Fig. 2.

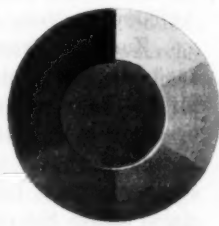


Fig. 3.

eine 6 mm dicke *Aluminiumschicht* größer als 6 B.-W. und andererseits nach der Durchquerung eines 0,11 mm dicken Silberbleches gleich 4 B.-W. geworden ist.

Das Resultat der Fig. 2 ist nun auf Grund der Röntgenschen Erklärung seines Absorptionsgesetzes ohne weiteres verständlich; denn nach dieser muß eben die durch einen beliebigen Stoff hindurchgegangene Strahlung unter allen Umständen *härter* geworden sein. Um so mehr aber steht mit dieser Erklärung das Ergebnis der Aufnahme 3 im Widerspruch; denn hiernach sind ja die durch das Silber hindurchgegangenen Strahlen nicht *härter*, sondern *weicher* geworden.

Das Verhalten der Strahlen bei diesen Versuchen erinnert vielmehr so sehr an die in der Optik so bekannte Erscheinung der „selektiven“ Absorption, daß es mit Rücksicht hierauf

sowie auf die von Benoist gefundene und in den Skalen seines Systems ja auch in so ausgesprochener Weise zum Ausdruck kommende Tatsache, daß das Silber die Strahlen einer harten Röhre verhältnismäßig stärker absorbiert als das Aluminium — daß es also mit Rücksicht auf diese Tatsachen im ersten Augenblicke das Einfachste zu sein scheint, das durch die Figg. 1—3 dieser Abhandlung nachgewiesene entgegengesetzte Verhalten des Silbers und des Aluminiums durch die Annahme zu erklären, daß das erstere Metall mehr von den *weichen*, das letztere dagegen mehr von den *harten* Strahlen des ursprünglichen, von der Röhre ausgehenden Strahlengemisches absorbiert. Bei näherer Überlegung findet man aber natürlich, daß die erstere dieser beiden Annahmen, nämlich die, daß das Silber die weichen Strahlen leichter hindurchlassen soll als die harten, offenbar in direktem Widerspruche mit der Röntgenschen Auffassung seines Absorptionsgesetzes steht.

Zur Aufklärung dieses Widerspruches erschien es mir nun zunächst von Wichtigkeit, dieses Gesetz selbst auch noch speciell für das *Silber* auf die Probe zu stellen, d. h. also nach der in der Einleitung erwähnten photometrischen Methode Röntgens festzustellen, ob auch beim Silber von den durch eine bestimmte Schicht hindurchgegangenen Strahlen in einer zweiten gleich dicken Schicht weniger absorbiert wird, als in der ersten. *Dies war denn nun tatsächlich der Fall*, und zwar wurde der Beweis hierfür einerseits — wie von Röntgen selbst — durch die Bestimmung der Zahlenwerte für die Durchlässigkeit der beiden Schichten und andererseits auch noch dadurch geführt, daß man zunächst unter Anwendung der *einen* Silberschicht das bedeckte und unbedeckte Feld des Leuchtschirmes durch entsprechende Verschiebung der beiden Röntgenröhren auf gleiche Helligkeit einstellte und dann eine mit der ersten gleich dicke Platte *vor oder hinter beide Felder zugleich* brachte. Es fand sich dann — wie beim Aluminium, Kupfer und Platin — so auch beim Silber und Zinn, daß dadurch das bis dahin unbedeckte Feld erheblich *dunkler* wurde als das andere; und dieselbe Erscheinung zeigte sich hierbei selbst dann, wenn das vor beide Felder geschaltete Metall ein anderes war als das bereits auf dem einen Felde befindliche, so daß sich also auf diese einfache Weise die Allgemeingültigkeit des Röntgen-

schen Absorptionsgesetzes sozusagen unmittelbar vor die Augen führen ließ.

Wenn nun aber auch so die Richtigkeit *dieses Gesetzes selbst* außer Frage gestellt sein dürfte, so kann dasselbe doch noch nicht für die *Röntgensche Erklärung* dieses Gesetzes gelten; vielmehr haben wir in dieser Beziehung das Resultat unserer obigen Auseinandersetzungen dahin zusammenzufassen, daß das abnorme Verhalten des Silbers und seiner Verwandten mit der Röntgenschen Auffassung selbst dann nicht in Einklang zu bringen ist, wenn man die oben erwähnte, von Benoist entdeckte Tatsache hinzuzieht, wonach die Metalle der Silbergruppe die Strahlen harter Röhren verhältnismäßig stärker absorbieren als die übrigen Metalle, und umgekehrt diejenigen weicher verhältnismäßig leichter hindurchlassen als diese. Denn, wenn danach auch sehr wohl zu verstehen ist, daß durch das bei der Aufnahme 3 vor die ganze Skala vorgeschaltete Silberblech ein größerer Prozentsatz an weichen Strahlen hindurchgegangen ist, als durch das bei der Aufnahme 2 vorgeschaltete Aluminium und daher die Strahlung im ersteren Falle weicher erscheinen muß als im letzteren, so ist deswegen doch immer noch nicht einzusehen, warum die durch das Silberblech gesiebtten Strahlen sogar weicher geworden sind *als die ursprünglichen* (vgl. die beiden Figg. 3 und 1); vielmehr bleibt diese Tatsache nach wie vor ein Widerspruch mit der Röntgenschen Erklärung seines Absorptionsgesetzes.

Läßt uns demnach diejenige Auffassung, welche hierin über die Zusammensetzung und das Verhalten der *direkten*, von der Röhre ausgehenden Strahlung ausgesprochen ist, bei der hier zu erklärenden Erscheinung vollkommen im Stich, so scheint nun allerdings noch der Ausweg übrig zu bleiben, zu diesem Zwecke die *sekundären*, in den betreffenden Metallen selbst entstehenden Strahlungen heranzuziehen; und tatsächlich findet denn auch ein sehr wesentlicher Unterschied in dem Verhalten der Sekundärstrahlen der hier in Frage kommenden Metallgruppen statt, ein Unterschied, auf Grund dessen die in Rede stehende Anomalie sich sogar im ersten Augenblick in verhältnismäßig einfacher Weise aufzuklären scheint.

Dieser Unterschied besteht nämlich in dem *ganz außerordentlich verschiedenen Durchdringungsvermögen* der hier in

Frage kommenden Sekundärstrahlen, eine Tatsache, die man z. B. dadurch nachweisen kann, daß man — wie in der Fig. 4 angedeutet — das zu untersuchende Metall *M* unter einem Winkel von 45° in das durch ein passendes Diaphragma abgegrenzte direkte Strahlenbündel hält und ferner in etwa 15 cm Abstand davon — senkrecht zur Richtung der direkten Strahlen

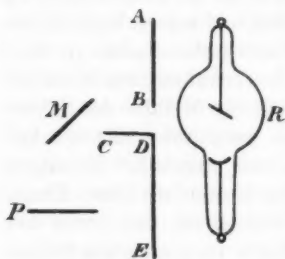


Fig. 4.

gemessen — die photographische Platte *P* anbringt, die natürlich gegen die Wirkung der direkten Strahlung und die der Glasstrahlung der Röhre *R* durch genügend starke Bleischirme geschützt werden muß. Zur Feststellung des Durchdringungsvermögens der Sekundärstrahlung von *M* legt man ferner auf *P* eine Härteskala nach Benoistschem System; und zwar habe ich bei meinen diesbezüg-

lichen Versuchen eine B.-W.-Skala benutzt, zu deren sechs Aluminiumfeldern aus sogleich ersichtlichen Gründen noch zwei stärkere von bez. 10,4 und 13,2 mm Dicke hinzugefügt wurden, Zahlen, die sich ohne weiteres aus der Progression dieser Skala ergeben.

Benutzt man nun z. B. eine Röhre von der Härte 5 B.-W. und als Sekundärstrahlen lieferndes Metall *M* einerseits eine 0,11 mm dicke Silberplatte und andererseits eine 6,0 mm dicke Aluminiumschicht — Metaldicken, die ja für die Strahlen der genannten Röhre äquivalent sind —, so erhält man bei einem Abstände von etwa 15 cm zwischen *M* und der Strahlenquelle sowie zwischen *M* und *P* bei gehöriger Belastung der Röhre schon mit einer Expositionszeit von einigen Minuten ein genügend kräftiges Bild der auf *P* liegenden Skala; und findet dann das Resultat, daß die auf diese Weise bestimmte Härte der Sekundärstrahlen des *Aluminiums* gleich 7 B.-W., derjenigen des *Silbers* dagegen nur gleich 2 B.-W.(!) ist. Dasselbe Resultat ergibt sich auch, wenn man *M* — statt nach vorne — nach hintenüber neigt, d. h. also, wenn man die Härte der das Blech *M* nach hinten zu verlassenden Sekundärstrahlen bestimmt; nur hat man in diesem Falle natürlich etwas länger zu exponieren.

Mit anderen Worten läßt sich dieses Resultat auch so ausdrücken, daß — *im Vergleich mit der direkten Strahlung* — *die Sekundärstrahlen des Aluminiums ganz außerordentlich viel leichter durch Aluminium und diejenigen des Silbers ganz außerordentlich viel leichter durch Silber hindurchgehen.*

Im ersten Augenblick scheint nun wie gesagt das hier beschriebene Resultat tatsächlich zu genügen, um die in den Figg. 2 und 3 zutage tretenden Gegensätze in der Härtebestimmung der durch das Aluminium bez. Silber hindurchgegangenen Strahlen zu erklären. Denn da in diesem Falle das Bild der Sekundärstrahlung des vorgeschalteten Metalles gewissermaßen einfach zu dem Bilde der direkten Strahlen, d. h. zu der Fig. 1 hinzuzufügen ist — wobei das letztere natürlich noch durch die vorgeschaltete Schicht um ein Erhebliches abgeschwächt zu denken ist —, so wird zunächst bei vorgeschaltetem Aluminium (Fig. 2) die Strahlung aus zwei Gründen härter erscheinen müssen als ohne dasselbe: einmal nämlich, weil die direkte Strahlung nach der Röntgenschen Auffassung seines Absorptionsgesetzes wirklich härter geworden ist und zweitens, weil auch die Sekundärstrahlung des vorgeschalteten Aluminiums eine so erheblich viel größere Härte hat als die direkte Strahlung. Bei vorgeschaltetem Silber andererseits (Fig. 3) ist die Härte der direkten Strahlung nach der Röntgenschen Auffassung zwar ebenfalls etwas härter geworden — wenn auch nicht soviel wie bei vorgeschaltetem Aluminium (Gesetz von Benoist) —; indessen wird diese Vermehrung der Härte hier vollständig dadurch verschleiert, daß die Härte der Sekundärstrahlung des vorgeschalteten Silberbleches so außerordentlich viel geringer ist, als die der direkten Strahlung, so daß also schließlich die Gesamthärte sozusagen das Mittel aus der der direkten Strahlen und der der Sekundärstrahlen wird. Nehmen wir also z. B. an, daß die Härte der ersteren beim Durchgang durch das vorgeschaltete Silberblech von 5 auf 6 gewachsen ist, so wird, da die Härte der Sekundärstrahlung jenes Bleches nach den oben beschriebenen Versuchen gleich 2 ist, dieses Mittel gleich 4, d. h. *um eine Nummer kleiner als die Härte der ursprünglichen Strahlung*; und dieses zeigt denn nun auch tatsächlich die Fig. 3.

Diese ganze Erklärung scheint offenbar sehr einfach und

ungezwungen; nichtsdestoweniger gibt es nun aber doch eine Erscheinung, die nicht mit ihr in Einklang zu bringen ist. Dieselbe besteht darin, daß das Resultat der Aufnahme 3 ungeändert bleibt, wenn man das Silberblech — statt unmittelbar vor der Skala — in einem beliebig großen Abstände vor derselben anbringt; und zwar bin ich dabei bis zu 50 cm gegangen. Nach der oben gegebenen Erklärung nämlich sollte man in diesem Falle offenbar ein ganz anderes Resultat erwarten; denn wenn es die Sekundärstrahlung des vorgeschalteten Silberbleches ist, welches den Widerspruch der Aufnahme 3 mit der Röntgenschen Erklärung seines Absorptionsgesetzes veranlaßt, so sollte man meinen, daß dieser Widerspruch sich schon durch eine kleine Vergrößerung der Entfernung zwischen diesem Bleche und der photographischen Platte bez. dem Leuchtschirm erheblich vermindern und schließlich auch ganz beseitigen lassen müßte, da doch durch diese Abstandsvergrößerung die Wirkung der sich *nach allen Seiten hin* zerstreuen den Sekundärstrahlung ganz außerordentlich vermindert werden muß, während, wenn man bei derartigen vergleichenden Versuchen die Entfernung zwischen Röhre und Leuchtschirm konstant hält, die Wirkung der direkten Strahlung natürlich konstant bleibt.

In ähnlicher Weise wurde dann noch festgestellt, daß es auch nicht etwa die in den Metallen der *Härteskala selbst* erzeugten Sekundärstrahlen sind, durch welche die zu erklärende Anomalie hervorgerufen wird, denn die letztere zeigte sich auch dann noch, wenn man die Entfernung zwischen *Leuchtschirm und Skala* beliebig vergrößerte, Versuche, für welche man allerdings, um die durch die unscharfe Zeichnung der Röhre entstehenden Halbschatten zu vermindern, statt der Härteskala besser eine Bleischablone mit zwei, einige Millimeter voneinander entfernten Ausschnitten benutzt, welche mit den beiden in Betracht kommenden Schichtdicken des Silbers und Aluminiums bedeckt werden. Ferner sei hier noch erwähnt, daß es bei diesen größeren Abständen zwischen Leuchtschirm und Metallen auch vollkommen gleichgültig ist, ob man das die beiden zu vergleichenden Schichten gemeinsam überdeckende Metall *vor* oder *hinter* denselben in den Gang der Strahlen einschaltet, während sich andererseits in unmittelbarer

Nähe des Schirmes allerdings ganz deutlich ein geringer Einfluß der Sekundärstrahlen des dem Schirme anliegenden Metalles erkennen läßt, der aber auch in diesem Falle viel zu gering ist, als daß er die hier in Rede stehenden Erscheinungen überdecken könnte.

Nach allem diesen kann man nun wohl mit ziemlicher Sicherheit behaupten, daß es *nicht* die Sekundärstrahlen der in Frage kommenden Metalle sind, welche die in Rede stehende Anomalie veranlassen; und da wir nun oben gesehen haben, daß auch diejenige Auffassung, welche sich Röntgen auf Grund seines Absorptionsgesetzes über die Zusammensetzung und das Verhalten der *direkten* Strahlung einer Röhre gebildet hatte, zur Aufklärung dieser Beobachtungen nicht geeignet erscheint, so dürfte daher kein anderer Ausweg übrig bleiben, als eben jene Auffassung durch eine andere zu ersetzen.

Eine Annahme nun, welche zur Erklärung der bisher bekannten Tatsachen nicht ganz ungeeignet sein dürfte, scheint mir die zu sein, daß *die Strahlung einer Röntgenröhre, die man dann sogar als homogen ansehen kann, bei der Absorption eben durch den Einfluß des absorbierenden Atomes selbst allgemein derartig verändert wird, daß sie für jeden beliebigen Körper ein größeres Durchdringungsvermögen erhält, bei den Atomen der Silbergruppe aber noch in besonderem Maße ein solches für Atome derselben Art.*

Denn daß durch diese Annahme zunächst das Röntgensche Absorptionsgesetz erklärt wird, folgt offenbar unmittelbar aus dem Wortlaut derselben; zugleich aber wäre dann auch die von Benoist entdeckte Ausnahmestellung der Metalle der Silbergruppe von diesem Gesichtspunkte aus so zu verstehen, daß die in dieser Theorie angenommene besondere Wirkung der Atome dieser Metallgruppe noch wieder in erhöhtem Maße auf die Strahlen *weicher* Röhren ausgeübt wird. Die eigentliche experimentelle Entscheidung aber liefert meines Erachtens die in der Fig. 3 auf p. 563 zutage tretende Erscheinung, da nämlich diese, wie ich oben gezeigt zu haben glaube, mit der bisherigen Auffassung nicht in Einklang zu bringen ist, während sie natürlich nach der neuen Theorie einfach so zu verstehen sein würde, daß die durch Silber hindurchgehenden Strahlen eben dadurch für Silberatome ein relativ größeres Durchdringungsvermögen erlangen, als für Atome anderer Art.

In einer besonders überzeugenden Weise läßt sich übrigens die Richtigkeit dieser neuen Auffassung auch noch dadurch zeigen, daß man bei dem in der Fig. 3 dargestellten Versuch einerseits für das vor die Härteskala vorgeschaltete Silberblech eine ähnliche Blechstärke aus einem der dem Silber atomistisch nahestehenden Metalle Palladium (Pd), Kadmium (Cd), Zinn (Sn) oder Antimon (Sb) bringt, und andererseits auch direkt die mittlere Silberscheibe der Benoistschen Skala durch eine Scheibe aus einem anderen dieser Metalle ersetzt und dann wieder einestheils die Härte der Strahlung mit freier Skala und anderenteils auch unter Vorschaltung aller in Frage kommenden Metalle bestimmt. Auf diese Weise ergaben sich bei Benutzung einer Skala in der ursprünglichen, von Benoist angegebenen Form, d. h. also mit 12 Aluminiumfeldern, für die Strahlung einer bestimmten Röhre folgende Feldnummern:

Das mittlere Blech der Benoistskala bestand aus	Feldnummer der freien Strahlung	Feld-Nr. d. Strahlung nach Vorschaltung von (mm):							
		4,5 Al	0,14 Cu	0,11 Pd	0,11 Ag	0,19 Cd	0,20 Sn	0,30 Sb	0,024 Pt
0,11 mm Ag	6,0	10	10	5,0	3,5	4,5	5,5	6,0	11
0,17 mm Cd	7,0	> 12	> 12	7,0	5,0	4,5	5,5	8,0	> 12
0,20 mm Sn	8,0	> 12	> 12	11	8,0	6,0	5,0	5,0	> 12
Atomgewichte:		27	63	106	108	112	117	120	194

Man ersieht aus dieser Tabelle zunächst wieder das schon von Fig. 2 her bekannte Resultat, daß durch die Vorschaltung von Aluminium, Kupfer und Platin die Feldnummer in der Skala ganz beträchtlich erhöht wird — und zwar gleichgültig, ob das mittlere Blech derselben aus Silber, Kadmium oder Zinn besteht. Weiter zeigt sodann die Tabelle auch das schon aus Fig. 3 bekannte Ergebnis, daß durch die Vorschaltung eines Metalles der Silbergruppe die Feldnummer in der Regel *erniedrigt* wird. Als eine neue Tatsache aber entnehmen wir schließlich aus dieser Tabelle noch die, daß *diese Erniedrigung durchaus nicht bei allen Metallen dieser Gruppe die gleiche, sondern stets am größten bei demjenigen ist, welches in der Skala selbst als Mittelfeld benutzt wurde*, und daß sie von hier aus um so mehr abnimmt, je mehr sich das Atomgewicht des vorgeschalteten

Metalles von dem des Mittelfeldes der Skala entfernt, um bei größeren Unterschieden dieser Atomgewichte unter Umständen auch ganz zu verschwinden und bei noch größeren sogar in eine Erhöhung überzugehen.

Alle diese Tatsachen sind nun offenbar nichts anderes als eine Bestätigung der oben gemachten Annahme, daß eine Röntgenstrahlung — wenigstens bei den Atomen der Silbergruppe — eben durch die Absorption die Fähigkeit erlangt, gerade dasselbe Atom relativ besser zu durchdringen als andere; und eine weitere bedeutsame Stütze scheint mir jene Annahme ferner auch noch durch die auf p. 566 angegebenen Versuche zu erhalten, wonach sogar die *Sekundärstrahlen* die hier in Rede stehende Eigenschaft haben, daß sie gerade denjenigen Stoff, in welchem sie entstanden sind, mit besonderer Leichtigkeit durchdringen. Auf diesen Punkt gedenke ich in einer besondern Abhandlung einzugehen.

Es sei schließlich noch erwähnt, daß die hier für die Elemente der Silbergruppe nachgewiesenen Eigenschaften für die Elemente anderer Atomgruppen nicht — oder doch wenigstens nur in viel geringerem Maße — gelten; denn als ich z. B. in das Mittelfeld einer Benoist-Skala ein Kupfer- oder ein Platinblech brachte, konnte ich bei Vorschaltung irgend eines Bleches derselben oder anderer Art keine Änderung der Feldnummer gegenüber derjenigen bei freier Strahlung beobachten.

Hamburg, Physik. Staatslaboratorium, im März 1905.

(Eingegangen 3. Juni 1905.)

**7. Über die Erzeugung physikalischer
Kombinationstöne mittels des Stentortelephons;
von Karl L. Schaefer.**

(Aus dem Psychologischen Institut der Universität Berlin.)

Ein Kombinationston, welcher einen auf dem Harmonium erzeugten Zweiklang begleitet, wird, wie Helmholtz¹⁾ gezeigt hat, durch einen gleichgestimmten Resonator verstärkt und ist mithin als objektive, physikalische Komponente in der Klangmasse enthalten. Wird dagegen von denselben Primärtönen der eine auf einem, der andere auf einem zweiten Harmonium angegeben, so hört man zwar auch, und nur wenig schwächer, den nämlichen Kombinationston, aber er vermag jetzt einen Resonanzapparat nicht zu erregen, entsteht vielmehr lediglich als subjektiver, physiologischer Ton im Ohre des Beobachters. Daraus folgt, daß die durch ein und dasselbe Harmonium hervorgerufenen Kombinationstöne zugleich einen physikalischen und einen physiologischen Ursprung haben, wobei ersterer offenbar auf das Anblasen beider Primärtöne aus einem gemeinsamen Windraume zurückzuführen ist. Das hier vom Harmonium Gesagte gilt in ganz gleicher Weise nach Helmholtz auch für dessen Doppelsirene und nach meinen eigenen späteren Versuchen²⁾ ebenso für die bekannten, ähnlich wie das Harmonium gebauten Appunnschen Zungenkasten. Weitere Instrumente oder Methoden zur Erzeugung physikalischer Kombinationstöne kannte man indessen bisher nicht, indem die Differenz- und Summationstöne aller anderen daraufhin geprüften Tonmittel sich immer als ausschließlich subjektive Töne erwiesen.³⁾

1) H. v. Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen. 5. Ausg. p. 259 ff. u. Beilage XVI.

2) K. L. Schaefer, Pflügers Arch. f. d. ges. Physiol. 78. p. 519. 1900.

3) Näheres hierüber in meinem Artikel „Gehörssinn“ in Nagels Handbuch d. Physiologie 3. p. 531 f. 1905.

In einer neueren, von mir in Gemeinschaft mit O. Abraham in diesen Annalen¹⁾ publizierte Untersuchung „Zur Lehre von den sogenannten Unterbrechungstönen“ hat sich nun herausgestellt, daß, wenn man einen Ton von der Schwingungszahl p , der mittels eines Mikrophones auf ein Telephon übertragen wird, u mal in der Sekunde durch periodisches Öffnen und Schließen der Kette unterbricht, sekundäre Töne entstehen, die hinsichtlich ihrer Schwingungszahlen angesehen werden können als Kombinationstöne zweier primärer Töne p und u nebst harmonischen Nebentönen, und daß solche sekundären Töne durch Resonatoren verstärkt werden. Dieses Resultat veranlaßte mich zu einer eingehenderen experimentellen Prüfung der Frage, ob denn nicht auch für die Kombinationstöne, welche gehört werden, wenn zwei gewöhnliche Primärtöne im Telephon erklingen, neben ihrer physiologischen Entstehung im Ohre noch physikalische Ursachen vorhanden sind.

Zu den Vorversuchen benutzte ich zunächst die von Keiser und Schmidt in Berlin-N. gelieferten Zimmer-telephone²⁾ des Berliner Psychologischen Institutes. Dieselben geben die Sprache gut hörbar wieder. Auch Kombinationstöne vernimmt man mehr oder weniger laut am Telephon der einen Station, wenn die Primärtöne unmittelbar vor dem Mikrophon der anderen erzeugt werden. Dagegen gelang es mir niemals, durch einen solchen Kombinationston einen Resonator oder eine Stimmgabel auf Resonanzkasten zum Mitklingen zu bringen. Natürlich durfte aber aus diesem Mißerfolge nicht ohne weiteres der Schluß gezogen werden, daß die in Rede stehenden Kombinationstöne rein subjektiv seien; vielmehr blieb die Möglichkeit, daß sie nur wegen zu geringer physikalischer Stärke keine Resonatoren erregten.

In der Tat wurde denn auch ein positives Ergebnis mit einem ebenfalls von Keiser und Schmidt bezogenen Instrumentarium gewonnen, welches aus einem älteren Mikrophon³⁾,

1) K. L. Schaefer u. O. Abraham, Ann. d. Phys. 13. p. 996. 1904.

2) Katalog vom Juli 1904, Nr. 194 (Körnermikrophon, Dosentelephon, zwei Brausteinelemente pro Station).

3) Katalog vom April 1894, Nr. 115 (Kohlenstäbe mit Federdämpfung [damaliges Modell der Reichspost] nebst Induktionsrolle).

einem Telephon mit Hufeisenmagnet¹⁾ und zwei Braunstein-elementen²⁾ bestand. Wurde aus diesen, in bezug auf die Schallstärke den Zimmertelephonen erheblich überlegenen, Apparaten eine Kette gebildet, vor dem Telephon eine Koenigsche c^2 -Gabel auf Resonanzkasten aufgestellt und vor dem Mikrophon der Zusammenklang der Koenigschen Gabeln c^2 und g^3 erzeugt, so kam c^2 mit voller Deutlichkeit zum Mitschwingen; ebenso ein auf diesen Ton gestimmter Resonator. Auch der Differenzton 400 der Gabelprimärtöne 2000 und 2400 wurde durch den ihm entsprechenden, vor das Telephon gehaltenen Resonator sehr merklich verstärkt. Die Primärtöne sind hierbei immer möglichst laut, möglichst gleich stark und möglichst nahe am Mikrophon angegeben worden.

Zu den Hauptversuchen verwendete ich indessen ausschließlich das Stentormikrophon und -telephon der Aktiengesellschaft Mix & Genest in Berlin-W. Diese Apparate³⁾, durch einen entsprechend starken Strom betrieben, lösen mit ausgezeichnetem Erfolge das Problem, gegen das Mikrophon Gesprochenes so laut zu übertragen, daß es ohne weiteres in der ganzen Umgebung des Telephons hörbar ist. Sie haben sich auch bei der vorliegenden Untersuchung auf das beste bewährt und dürften zu manchen anderen physikalisch- oder physiologisch-akustischen Experimenten nicht minder geeignet sein. Die nötigen Instrumente wurden mir mit liebenswürdigstem Entgegenkommen von der Firma Mix & Genest zur Verfügung gestellt, in deren Laboratorium ich überdies jede gewünschte Unterstützung beim Ausprobieren der vorteilhaftesten Versuchsanordnung erhielt. Ich möchte auch an dieser Stelle hierfür meinen ergebensten Dank abstaten.

Als Stromquelle für die Stentorapparate wurden mir zunächst Akkumulatoren empfohlen. Es erwies sich aber schließlich für meine Zwecke als bequemer und ausreichend, neun hintereinandergeschaltete Braunsteinelemente mit zusammen 11,2 Volt Spannung zu nehmen. Diese Batterie wurde mit dem Stentormikrophon, einem Stentortelephon von 4 Ohm

1) Katalog vom April 1894, Nr. 104.

2) Katalog vom März 1902, Nr. 601.

3) Vgl. H. Zopke, Das Telephon im Seewesen; Jahrbuch d. Schiffbautechn. Gesellsch. 1904; Fig. 1, 43 u. 44 nebst zugehörigem Texte.

Widerstand und einem Stromschlüssel zu einer einfachen Kette verbunden. Die Bestandteile derselben konnten je nach Belieben entweder in dem gleichen Raume oder in getrennten Zimmern aufgestellt werden. Die Stromstärke betrug unmittelbar nach Stromschluß 0,6—0,7 Amp., sank in den ersten 2 Minuten auf ungefähr 0,3 und hielt sich dann während der nächsten Zeit ziemlich konstant auf dieser Höhe. Die einzelnen Versuche pflegten höchstens einige Minuten zu dauern; nach Beendigung eines jeden wurde der Strom geöffnet.

Zu den ersten Beobachtungen dienten Appunnsche Gabeln als primäre Tonquellen und zwar (nach den Schwingungszahlen bezeichnet) die Paare 800 + 1000, 1200 + 1600, 1600 + 2400, 2000 + 2400. Die beiden Gabeln wurden jedesmal kräftig aneinandergeschlagen und dann in den Schalltrichter des Mikrophons hineingehalten. Die respektiven Differenztöne 200, 400 und 800 klangen direkt aus dem Telephon heraus, während rein subjektive Differenztöne seitlich und etwas nach hinten vom Ohre lokalisiert zu werden pflegen, und wurden durch entsprechende zylindrische, konische und kugelförmige Resonatoren mit solcher Deutlichkeit verstärkt, daß weder ich noch einer der verschiedenen Mitbeobachter über ihre objektive Existenz im Zweifel bleiben konnte.

Die Resonatoren werden meist in der Weise benutzt, daß man sie ins Ohr steckt. Ich halte dieses Verfahren für nicht immer einwandfrei, da leicht zufällige Erregungen das Vorhandensein des erwarteten Tones vorzutäuschen vermögen. Um ganz sicher zu gehen, hält man am besten den Resonator (nicht zu dicht) an die Schallquelle und läßt einen Finger auf der eigentlich zur Einführung ins Ohr bestimmten Öffnung, diese abwechselnd schließend und freigebend, spielen. Der Resonator reagiert dann, wenn überhaupt, nur im ersteren oder nur im letzteren Falle oder zugleich in beiden, je nachdem er etwas zu hoch oder etwas zu tief für den betreffenden Ton oder einigermaßen genau auf denselben abgestimmt ist. Ein weiterer ebenfalls zweckmäßiger Modus besteht darin, daß man die große Schallöffnung des Resonators dem Ohre von vorne her ziemlich nahe bringt und die zweite, wie eben beschrieben, bald verschließt, bald öffnet. Von diesen drei Methoden habe ich die erste nur ausnahmsweise, wenn die

anderen nicht genügten, und dann mit der nötigen Vorsicht zur Anwendung gebracht.

Vor den rasch verklingenden Gabeln haben die Lippenpfeifen als Primärtonquellen den Vorzug, eine Beobachtung von längerer Dauer und bei gleich bleibender Stärke zu gestatten. Ich stellte daher auch mit zwei Edelmannschen verschieblichen Pfeifen vom Tonumfange c^2 bis a^3 , die mit einem kräftigen und hinsichtlich des Druckes für diese Tonregion genügend konstant wirkenden Blasebälge verbunden wurden, Versuche an. Wiederum ergab das Telephon physikalische Differenztöne und zwar sowohl solche erster Ordnung, also von der Form $h - t$, wenn h die Schwingungszahl des höheren und t diejenige des tieferen Primärtones ist, als auch solche höherer Ordnung. So wurden beispielsweise die Differenztöne 200 ($h - t$) und 500 ($2t - h$) der primären Töne 700 und 900 durch ihre Resonatoren sehr lebhaft verstärkt. Bei den Primärtönen 790 und 645 war nur der zweite Differenzton (500) mittels Resonators nachweisbar, der viel schwächere erste (145) nicht.

Die durch Labialpfeifen vor dem Mikrophon erzeugten Primärtöne werden von dem Telephon bis zu beträchtlicher Höhe hinauf, von der viergestrichenen Oktave an freilich mit abnehmender Stärke und Klarheit, reproduziert. Als möglichst dicht vor dem Mikrophon zwei ältere Galtonpfeifen angeblasen wurden, von denen ich die eine ungefähr auf Teilstrich 13,3 und die andere auf fast 14,9 eingestellt hatte, wurde im Telephonzimmer der Differenzton 512 mit bloßem Ohre ganz laut gehört und durch den in die Nähe der Telephonmembran gebrachten Kasten der Pariser c^2 -Gabel deutlich verstärkt. Zuweilen schien sogar die Gabel c^2 selbst zum Mitklingen zu kommen; doch war diese Beobachtung nicht sicher, vielleicht nur deshalb, weil infolge geringer Schwankungen des Winddruckes die Höhe der Primärtöne und damit auch die des Differenztones nicht absolut konstant blieb. Als ich mit den Galtontönen bis in die sechsgestrichene Oktave hinaufging und dieselben wiederum auf den Differenzton 512 einstimme, ließ sich ebenfalls noch eine Verstärkung des letzteren konstatieren, besonders wenn der Kasten der c^2 -Gabel unmittelbar vor dem Telephon stand und außerdem der Koenigsche Resonator für c^2

ins Ohr gesteckt ward. Doch waren hier die Tonhöenschwankungen ziemlich störend. Interessant ist, daß bei so hoher Lage der Primärtöne der Differenzton vom Telephon merklich klarer produziert wird als die ersteren. Dies erinnert an die von R. Koenig sicher festgestellte Tatsache, daß im menschlichen Ohre Differenztöne auch dann noch zustande kommen, wenn die Primärtöne selbst wegen zu großer Höhe gar nicht mehr wahrzunehmen sind.

Noch eklatanter als mittels der Resonatoren läßt sich die objektive Existenz der Differenztöne des Stentortelephons durch resonierende Gabeln nachweisen. Werden die recht stark und gleichmäßig gestrichenen Koenigschen Gabeln c^3 und g^3 nebeneinander einen Augenblick vor das Mikrophon gehalten und dann wieder zum Schweigen gebracht, so hört man eine in der Nähe der Telephonplatte aufgestellte c^2 -Gabel auf Resonanzkasten, die sehr genau mit dem Differenztone der beiden anderen übereinstimmt, laut und anhaltend ertönen. Die Erregung derselben tritt, wie kaum erwähnt zu werden braucht, nur ein, wenn der Strom geschlossen ist, dann aber noch auf eine Distanz von mehr als 1,5 m. Bei der vertiefenden Belastung ihrer Zinken mit einem nicht allzu kleinen Wachsklumpchen bleibt c^2 ebenso stumm wie die cis^2 -Gabel. Wählt man andere Primär- und Differenztongabeln, so zeigt sich die Intensität des Mitklings nicht immer so erheblich. Sie hängt eben von den verschiedenen Versuchsumständen ab, namentlich wohl von der Stärke des Kombinationstones und der Genauigkeit, mit welcher die resonierende Gabel auf denselben abgestimmt ist. Ist die Resonanz nur schwach, so muß man mit gewissen Kautelen arbeiten. Die von mir benutzten Koenigschen Gabeln sind nämlich zum Teil so empfindlich, daß oft schon das Öffnungs- und Schließungsknacken der Telephonmembran oder andere zufällige kleine Erschütterungen genügen, um ein allerdings sehr leises Erklingen zu bewirken. Bei meinen Experimenten wurden Täuschungen dieser Art immer sorgfältig vermieden.

Daß nicht nur der erste, sondern auch der zweite Differenzton ($2t - h$) Gabeln zum Mitschwingen zu bringen vermag, konnte ich mittels des Primärtonpaares $c^3 + c^4$ konstatieren. Ein anderer an dieser Stelle bemerkenswerter Fall

betrifft die Primärtöne e^3 und g^3 . Dieselben brachten die c^2 -Gabel zum Tönen, obwohl ihr Differenzton c^1 ist. Hier dürften die Oktaven der Primärtöne als Ursache anzusehen sein, die als Obertöne erstens in den starken Gabelklängen mit enthalten sind und zweitens, wovon gleich noch weiter die Rede sein wird, von der Telephonplatte selbständig erzeugt werden. Vielleicht entstehen auch die objektiven Kombinations-töne im Klange der Telephonmembran an sich nicht als reine Sinustöne, sondern zusammen mit harmonischen Obertönen.

Im Laufe einer früheren Untersuchung habe ich, am Harmonium und Appunnschen Dreiklangapparat experimentierend, gefunden, daß solche Differenz-töne, deren Schwingungszahlen zwischen die der Primärtöne fallen, Resonatoren nicht erregen. Ich konnte sie dann auch mit bloßem Ohre nicht wahrnehmen. Nur bei dem Zweiklang $c^0 + e^1(2:5)$ hörte ich sehr schwach den zwischenliegenden Differenzton g^0 im Resonator. Es ergab sich jedoch, daß auch der Oberton $c^2(= 4.2)$ im Klange enthalten und aller Wahrscheinlichkeit nach die Ursache des Differenztones $g(3) = c^2 - e^1(8 - 5)$ war.¹⁾ Dem gegenüber verdient hervorgehoben zu werden, daß am Stentor-telephon auch zwischenliegende Differenz-töne mit aller Deutlichkeit zu beobachten sind. So brachten die unmittelbar vor dem Mikrophon stark angestrichenen Pariser Gabeln c^2 (1024 v. s.) und e^3 (2560 v. s.) die auf ihrem Resonanzkasten dicht vor dem Telephon stehende Gabel g^2 (1534,3 v. s.) durchs ganze Zimmer hörbar zum Mitschwingen, trotzdem g^2 , weil temperiert, nicht ganz mit dem Differenzton der Höhe nach übereinstimmte. Einen positiven Erfolg erzielte ich ferner mit den Gabelprimärtönen c^2 (1024 v. s.) und d^3 (2304 v. s.), welche die Gabel e^2 , nachdem sie von 1290,2 auf 1280 v. s. herabgestimmt war, zum Tönen veranlaßten; desgleichen mit den von Edelmannschen Pfeifen erzeugten Primärtonpaaren 700 + 1500 und 700 + 1900, deren respektive Differenz-töne 800 und 1200 die entsprechenden Resonatoren lebhaft erregten. (Im zuletzt genannten Falle ließen sich übrigens noch die Differenz-töne $3t - h$ und $h - 2t$ als objektiv vorhanden nachweisen.)

1) K. L. Schaefer, Pflügers Arch. f. d. ges. Physiol. 78. p. 520f. 1900.

Die Frage, ob die zwischenliegenden Differenztöne des Stentortelevhons echte, lediglich von den Primärtönen herzeleitende Töne dieser Art sind, oder ob sie, wie in dem oben vom Harmonium erwähnten Beispiele, durch Obertöne hervorgerufen werden, muß in einer besonderen Untersuchung behandelt werden, wobei zu beachten sein wird, daß die betreffenden Obertöne, auch wenn sie den Primärtönen selbst fehlen, im Telephonklange enthalten sein können.

Hinsichtlich dieser selbständigen Erzeugung von Obertönen seitens des Stentors möchte ich die folgenden beiden Beobachtungen mitteilen.

1. Mittels einer Sternschen Stempelpfeife wurde im Saale des Institutes ein kontinuierlicher Ton von 400 Schwingungen angegeben und zwar unmittelbar vor dem einen Ende einer Schallrohrleitung, die von hier aus durch ein zweites Zimmer in den Beobachtungsraum führte, wo sie in einen Interferenzapparat mündete. Vor der freien Öffnung des letzteren, aus welcher der Ton 400 mit ziemlicher Stärke herausdrang, war die Oktave 800 sowohl durch ihre Schwebungen mit einer fast unisonen Stimmgabel als auch durch einen Resonator nachweisbar, solange keine Interferenz stattfand, während die Schwebungen und die Erregung des Resonators ausblieben, sobald die Interferenzvorrichtung sorgfältig auf den Ton 800 eingestellt war. Traf nun im letzteren Falle der Grundton 400 unmittelbar nach seinem Austritt aus der Röhre auf das Stentormikrophon, so war im Telephonklange der erste Oberton doch wieder vorhanden und durch den Resonator wie durch die schwebende Hilfsgabel leicht zu konstatieren.

2. Im Saale wird vor der Röhre eine Koenigsche c^2 -Gabel so stark wie möglich angestrichen; dicht vor der Rohrmündung im Beobachtungszimmer steht die c^3 -Gabel auf ihrem Resonanzkasten. Dieselbe wird, obschon nur leise, von der anderen zum Tönen gebracht, falls deren Oktave nicht durch Interferenz beseitigt ist; sonst bleibt sie völlig stumm. Wird aber das Stentormikrophon an ihre Stelle und sie, die c^3 -Gabel, selbst vor das Telephon gesetzt, so findet das Mitschwingen jedesmal statt, mag nun Interferenz bestehen oder nicht, ist jedoch beim Fehlen derselben etwas stärker.

Es ist nun noch kurz über diejenigen Versuche zu be-

richten, welche die Summationstöne des Stentortelephones betrafen und auch deren objektive Existenz unzweifelhaft ergaben. In erster Linie verwendete ich dazu wieder die Pariser Gabeln nach derselben Methode und mit den gleichen Vorsichtsmaßregeln, wie oben beschrieben. Die Primärtöne waren $c^3 + e^3$, $c^3 + g^3$, $f^3 + c^3$, die respektiven Summationstöne d^3 , e^3 und a^3 . Da die Gabeln, die mir zu Gebote standen, teils temperiert, teils rein gestimmt sind, so paßten die Schwingungszahlen nicht völlig genau. Dem ließ sich jedoch leicht durch Ankleben von etwas Wachs an die eine oder andere Gabel abhelfen. Von den weiteren, mit anderen Primärtonquellen angestellten Beobachtungen, die alle in der Hauptsache übereinstimmten, sei hier nur die folgende angeführt, bei der die, von Sternschen Pfeifen stammenden, Primärtöne um mehr als eine Oktave auseinanderlagen. Ihre Schwingungszahlen waren 300 und ca. 710—715. Im Beobachtungszimmer, in dem das Telephon aufgestellt war, war der Summationston mit bloßem Ohre an schwachen Schwebungen mit der Koenigschen c^3 -Gabel zu erkennen. Ein zylindrischer Resonator für 1000 Schwingungen und der Koenigsche kugelförmige für c^3 verstärkten ihn deutlich bei jeder Art ihrer Verwendung.

Bekanntlich ist es noch unentschieden, ob ganz obertonfreie Grundtöne allein imstande sind, durch ihr Zusammenwirken Summationstöne zu erzeugen, oder ob letztere nur als Differenztöne höherer Ordnung anzusehen sind. Es scheint mir sehr empfehlenswert, auch den Stentorapparat mit zur Entscheidung hierüber heranzuziehen. Freilich dürfte man sich nicht, wie beim Hören mit dem bloßen Ohre, damit begnügen, die fraglichen Obertöne aus dem Primärklange durch Interferenz auszuschalten. Denn während sich im Ohre im allgemeinen keine Obertöne bilden, ist dies, wie oben besprochen, beim Stentor der Fall. Die Untersuchung kann vielmehr nur so geführt werden, daß man den Telephonklang mit dem Ohre, eventuell unter Zuhilfenahme von Resonatoren und schwebenden Gabeln, bezüglich der in Betracht kommenden Teiltöne¹⁾ sorgfältig analysiert. Vorläufig habe

1) Vgl. hierzu die Formeln für Summationstöne in meinem Artikel „Gehörssinn“ in Nagels Handbuch d. Physiologie 3. p. 530. 1905.

ich jedoch Experimente in dieser Richtung noch nicht unternommen.

Der wesentliche Zweck der vorliegenden Untersuchung war es, zu zeigen, daß das Stentortelephon physikalisch bedingte Kombinationstöne hören läßt. Nachdem nun der Nachweis derselben evident erbracht ist, erheben sich die beiden Fragen, wo und wie sie entstehen. Zur Lösung der schwierigeren zweiten bedarf es noch weiterer Studien. Auf die erste läßt sich aber schon jetzt eine, wie ich glaube, befriedigende Antwort geben.

Da die Telephonplatte unter dem Einflusse elektromagnetischer Impulse vibriert, so ließe sich denken, daß in diesen die Ursache der Kombinationstöne zu suchen sei. Bezeichnen wir die Schwingungszahlen der Primärtöne wieder mit h und t , so veranlaßt der höhere Ton h mal, der tiefere t mal in jeder Sekunde ein Schwingen der Membran gegen den Magneten. Die Anziehungen in den ungleichen Rhythmen h und t interferieren miteinander, und wenn man sich diese Interferenz etwa unter dem Bilde einer Schwebungskurve veranschaulicht, so könnte man zu der Vorstellung gelangen, daß die $h-t$ Maxima in gleicher Weise wirkten wie ebenso viele gewöhnliche, von einem Primärtone $h-t$ herrührende, einfache Anziehungsimpulse. Die Berechtigung einer solchen Auffassung ist jedoch schon rein theoretisch wenig wahrscheinlich und läßt sich überdies experimentell direkt widerlegen. Verhielte sich nämlich die Sache so, wie eben dargestellt, so müßte auch eine auf den Ton $h-t$ abgestimmte elektrische Stimmgabel unter dem gleichzeitigen Einflusse der Primärtöne h und t in Bewegung gesetzt werden. Dergleichen findet indessen nicht statt, wie die folgenden beiden, schon früher von Hermann in einem anderen Zusammenhange ausgeführten Versuche zeigen.

Hermann schreibt darüber¹⁾: „Ich schaltete zwei Telephone in denselben Kreis mit dem Elektromagneten einer Koenigschen sekundären elektrischen Stimmgabel, welche auf den Ton F abgestimmt war. Die Telephone A und B befanden sich in einem entfernten Zimmer; ihre Eisenmembranen

1) L. Hermann, Pflügers Arch. f. d. ges. Physiol. 49. p. 516 und 518. 1891.

waren beseitigt, und es wurden von zwei Assistenten zwei angeschlagene Koenigsche Stimmgabeln a^1 und c^2 so sehr als möglich ihren Drahtspulen genähert. Niemals aber gelang es auf diese Weise, die Gabel F , welche dem Differenzton von a^1 und c^2 entspricht, zum leisesten Mitschwingen zu bringen, während, wenn man einem der Telephone eine F -Gabel nähert, die elektrische Gabel sehr schwach mitschwingt.“ Hermann erblickt hierin mit Recht eine Bestätigung für „die Aussage der Theorie, daß ein elektrischer Körper durch alternierende Verstärkungen und Schwächungen einer auf ihn wirkenden Schwingung und durch Übereinstimmung der Periode dieser Verstärkungen mit seinem Eigentone nicht in Schwingungen versetzt werden kann“. Der zweite Versuch stellt nur eine verbesserte Form des ersten dar. „Als primäre Stromgeber dienten zwei akustische Unterbrecher, ein Koenigscher auf c^2 , und ein Bernsteinscher auf a^1 gestimmt, jeder durch eine besondere Kette getrieben. Beide waren mit sekundären Spiralen versehen, und diese hintereinander in den Kreis der im entfernten Zimmer befindlichen sekundären Stimmgabel F eingeschaltet. Dieselbe ertönte wiederum niemals, dagegen sehr kräftig, wenn der Bernsteinsche Unterbrecher auf F eingestellt wurde.“

Hiernach bleibt nur übrig, daß die objektiven Kombinationstöne des Stentors durch die Membranschwingungen selbst hervorgerufen werden. Was nun die Mikrophonplatte betrifft, so habe ich wiederholt bei offenem und geschlossenem Strome geprüft, ob physikalische Differenztöne an ihr zu konstatieren wären, aber stets vergebens, mochten auch die Primärtöne so laut und so nahebei wie möglich angegeben und der Resonanzkörper tunlichst dicht ans Mikrophon herangeführt werden. Es muß also der Telephonplatte die Erzeugung der Kombinationstöne zugeschrieben werden, oder vielleicht besser gesagt der Hauptanteil daran. Denn es soll keineswegs bestritten werden, daß auch die Mikrophonplatte schwache, zur Erregung von Resonatoren nur nicht hinreichend intensive, objektive Kombinationstöne produziert. Ich neige im Gegenteil der Ansicht zu, daß wir es hierbei mit einer allgemeinen Eigenschaft tönender Membranen zu tun haben dürften, und zwar mit Rücksicht auf gewisse, noch im Gange befindliche

Versuche, bei denen ich gefunden habe, daß auch eine, über einen Ring oder Zylinder gespannte, plane oder trichterförmige Membran aus Schweinsblase Resonatoren erregende Differenz-töne hervorzurufen vermag, wenn man zwei passend gewählte Primärtonwellen gleichzeitig auf sie einwirken läßt. Diese Beobachtungen sollen an anderer Stelle¹⁾ veröffentlicht werden, da sie ein vorwiegend physiologisches Interesse bieten, insofern Helmholtz bekanntlich die Hypothese aufgestellt hat, daß das Trommelfell als Ursprungsort der Kombinationstöne anzusehen sei. Es scheint, daß er hiermit auf dem richtigen Wege gewesen ist, wenn auch die von ihm gegebene Erklärung in-zwischen mehrfachen Widerspruch erfahren hat.

1) Voraussichtlich in Pflügers Arch. f. d. ges. Physiologie.

(Eingegangen 5. Juni 1905.)

8. *Antwort an H. Hulshof;*
von G. Bakker.

Durch van der Waals wurde der ordentlichen Versammlung der naturphilosophischen Abteilung der Konink. Akad. van Wetensch. zu Amsterdam am 29. Januar 1900 eine Arbeit H. Hulshofs über Oberflächenspannung vorgelegt. Später ist diese Arbeit erschienen in dieser Zeitschrift am 30. Oktober 1900. Über diese Arbeit habe ich *nach Anregung durch eine Äußerung* Hulshofs eine Bemerkung gemacht.¹⁾ Hulshof gibt nun hierauf eine Erwiderung²⁾, worauf ich folgendes zu antworten habe. Hulshof schreibt: „Zuerst sagt Bakker, daß von ihm in der Zeitschr. f. phys. Chem. 28. p. 717. 1899 schon auf *ähnliche* Weise eine Beziehung deduziert sei, als sie von mir in den Berichten der Konink. Akad. van Wetensch. mitgeteilt worden ist. Diese Behauptung Bakkers erweist sich aber als falsch, wenn man sein Stück liest. Hier leitet Bakker den Wert des Molekulardruckes in einem Punkte der kapillaren Schicht aus der Vorstellung her, daß dieser Druck entstehe, indem die verschiedenen Schichten, woraus die Grenzschicht besteht, zufolge der gegenseitigen Attraktion nach innen getrieben würden. Also wird der Molekulardruck in einem Punkte durch Kräfte bestimmt, welche zum Teil weit außerhalb dieses Punktes wirken. *Bei dieser Auffassung ist der Molekulardruck eine Größe, welche in allen Richtungen denselben Wert hat.* Bakker gibt denn auch für den Wert des Molekulardruckes in diesem Punkte nur *einen einzigen* Wert an.“

1) H. Hulshof, Ann. d. Phys. 14. p. 609. 1904.

2) l. c. 16. p. 188.

Jeder, der unsere Arbeiten liest, wird finden, daß wir uns beide auf den Laplaceschen Standpunkt stellen. Da ich aber Gebrauch mache von schon bekannten Ausdrücken nach Rayleigh und van der Waals, so ist meine Ableitung der betreffenden Stelle kürzer gefaßt. Wie ich übrigens schon bemerkt habe, ist der Ausdruck Hulshofs für $p_1 - p$ unvollständig und es würde unschwer sein, zu zeigen, daß er niemals richtig sein kann. Daß für die durch van der Waals nachgewiesene Potentialfunktion der Laplaceschen Volumkräfte bei der Vernachlässigung Hulshofs die Kapillarkonstante identisch Null zum Wert haben würde, ist durch mich schon gezeigt worden. Es entsprach nun der Berechnung der Differenz $p_1 - p$ als ich sagte: „Hulshof berechnet erstens die Kohäsion in der Richtung senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche etc.“¹⁾ Ich habe also durch die Rechnung auf p. 711 und 717 meiner „Bemerkung zur Thermodyn. Theorie der Kapillarität von van der Waals“²⁾ gar keinen Molekulardruck in verschiedener Richtung berechnen wollen.

Hulshof hat weiter die Kohäsion in einer Richtung parallel der Oberfläche der Kapillarschicht berechnet. Ich muß aber bemerken, daß ich mit Hilfe der Potentialfunktion, die durch van der Waals in seine thermodynamische Theorie der Kapillarität eingeführt ist (und welche, wie ich gezeigt habe, allen Forderungen der Theorie genügt) diese Berechnung der Kohäsion, parallel sowohl wie senkrecht zur Oberfläche der Kapillarschicht schon in den Abhandl. d. Konink. Akad. van Wetensch. zu Amsterdam vom November 1899 ausgeführt habe. (Also vor der Erscheinung der Arbeit Hulshofs.) Wenn nun Hulshof sagt: „Meiner Auffassung nach bestimmt man den Molekulardruck in einem Punkte (als die direkte Folge der Attraktion der Teilchen) aus dem Zustande der unmittelbaren Umgebung dieses Punktes, und ist der Molekulardruck³⁾ in Folge der nicht homogenen Stoffverteilung in der kapillaren Schicht

1) H. Hulshof, Ann. d. Phys. 14. p. 609. 1904.

2) G. Bakker, Zeitschr. f. phys. Chem. 28. p. 717. 1899.

3) Molekulardruck bedeutet hier Kohäsion.

in verschiedenen Richtungen verschieden“, so muß ich wieder auf meine oben genannten Aufsätze hinweisen. Die Maxwell'sche Auffassung, der ich gefolgt, läßt unmittelbar erkennen, daß auch für mich die Kohäsion in der Kapillarschicht ein Vektor war, welcher von der Richtung abhängig ist. Wenig Sinn hat es also, wenn Hulshof sagt: „Also sind eben in der Sache, um welche es sich bei der Erklärung der Oberflächenspannung handelt, unsere Meinungen prinzipiell und vollkommen verschieden, so daß statt *ähnlich* gelesen werden soll: *ganz verschieden*. Es ist aber höchst merkwürdig, daß Bakker im April 1904 so etwas schreiben kann, denn hieraus geht hervor, daß er den wirklich tiefgehenden Unterschied zwischen beiden Auffassungen nicht begreift, obwohl er einige Monate nach meiner Mitteilung an die Konink. Akad. van Wetensch. auf dieselbe Weise, wie ich es tat, den Molekulardruck¹⁾ in der kapillaren Schicht bestimmt hat.“ Im Jahre 1899 habe ich also wie Hulshof im Januar 1900 die Kohäsionen in einer Richtung senkrecht und parallel ihrer Oberfläche berechnet und Hulshof findet es nun höchst merkwürdig, daß ich später auf diese Weise fortfuhr, die Theorie der Kapillarschicht auszubilden. Ich bin der Meinung, daß es meine wissenschaftliche Pflicht war. Ebenso hat es wenig Sinn, wenn Hulshof bemerkt: „Dieses Resultat, daß in der kapillaren Schicht der Molekulardruck¹⁾ infolge der Attraktion in verschiedener Richtung einen verschiedenen Wert hat, welcher aber *nicht* neu war, wie Hulshof meinte etc. . . .“ Ich kann wieder nicht besser tun, als auf die *zwei* genannten Abhandlungen zu verweisen.

In bezug auf seine Bemerkung auf p. 191 oben: „Sonderbar ist es auch, daß Bakker behauptet, es sei mir unbekannt, daß bei genügend niedriger Temperatur der Druck in der Grenzschicht in der Richtung jener Schicht negativ sein muß“, lade ich den Leser der Annalen der Physik ein, diese Behauptung in meiner Abhandlung aufzusuchen, denn *ich kann sie nicht finden*.

1) Molekulardruck bedeutet hier Kohäsion.

Hulshof schließt seine Erwiderung auf merkwürdige Weise: „Er (Bakker) sagt zwar in einem Anhang zu seiner Bemerkung p. 619: Weiter ist die Kohäsion in der Richtung der Kraftlinien und also senkrecht zur Oberfläche der Kapillarschicht:

$$S_1 = -\frac{1}{8\pi f} \left\{ \left(\frac{dV}{dh} \right)^2 - \frac{v^2}{\lambda} \right\}$$

und in der Richtung der Oberfläche:

$$S_2 = -\frac{1}{8\pi f} \left\{ \left(\frac{dV}{dh} \right)^2 + \frac{v^2}{\lambda} \right\}$$

und verweist nun auf eine Mitteilung von seiner Hand an die Konink. Akad. van Wetensch. p. 322. 1899, aber wenn man hieraus schließen wollte, daß Bakker damals schon gewußt habe, daß der Molekulardruck (Kohäsion) in der kapillaren Schicht in verschiedener Richtung verschieden ist, dann würde man sich sehr irren. An angeführter Stelle spricht Bakker gar nicht von Kohäsion, und wie aus der vorigen Seite derselben Abhandlung hervorgeht, war der Molekulardruck für ihn damals noch eine Größe, die in allen Richtungen denselben Wert hat.“

Hulshof verweist also auf meine Mitteilung an die Konink. Akad. van Wetensch. zu Amsterdam 1899, welche oben mehrmals von mir erwähnt worden ist, und erkennt, daß ich *verschiedene* Werte für die Spannungen¹⁾ bez. in einer Richtung *senkrecht* und *parallel* der Oberfläche der Kapillarschicht finde, aber meint nun: „Ich soll nicht gewußt haben, daß nun auch die Kohäsion in der kapillaren Schicht in verschiedener Richtung verschieden ist!“

Indessen, wie kommt nun Hulshof zu dieser sonderbaren Äußerung? Ganz einfach: *er wirrt hier zwei Sachen durcheinander*. Bevor ich die Ableitungen der *verschiedenen* Ausdrücke für die Spannungen oder Kohäsionen bez. senkrecht und parallel der Oberfläche der Kapillarschicht gebe, sage ich l. c.: „Berechnen wir nun aber erstens den Molekular-

1) Ich nannte die Kohäsionen Spannungen im Sinne Maxwells.

druck, d. h. die Kraft, mit welcher ein Säulchen der kapillaren Schicht mit dem Durchschnitt Eins in der Richtung nach der Flüssigkeit hin durch die Materie ringsum nach unten gezogen wird etc.“ Diese Berechnung gab den Ausdruck: $a(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)$. Hierauf folgen nun meine Berechnungen über die Spannungen (Kohäsionen) in der Kapillarschicht. Die vorhergehende Berechnung hat also nichts mit *diesen* Berechnungen zu schaffen.

(Eingegangen 21. Juni 1905.)



Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.



Fig. 4.



Fig. 9a.



Fig. 5.



Fig. 7.



Fig. 8a.



Fig. 8b.



Fig. 6.



Fig. 9b.



Fig. 10.

Aug. Becker.



